

Застосування переміщень фігур для розв'язування геометричних задач

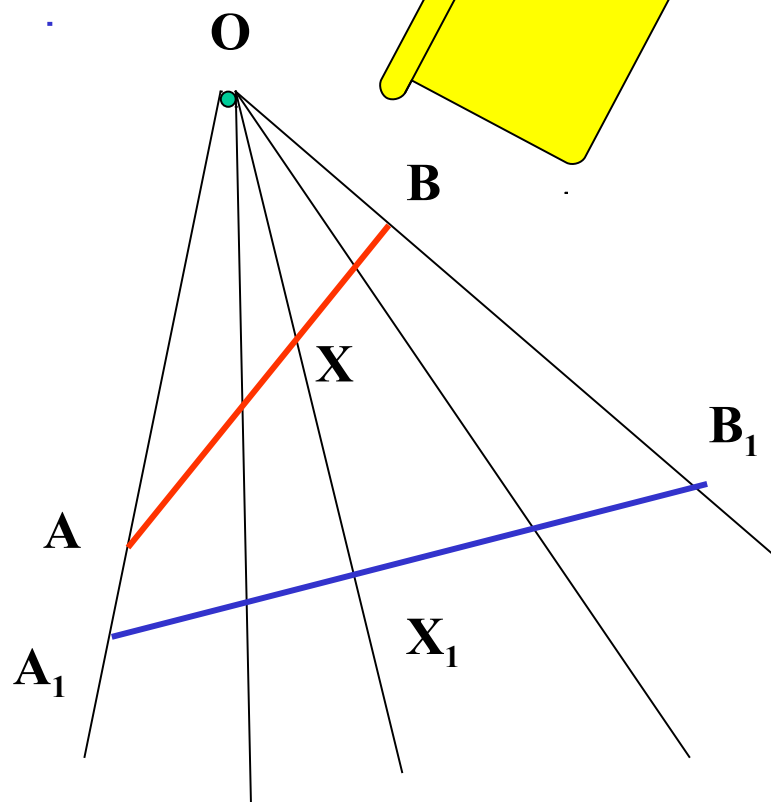
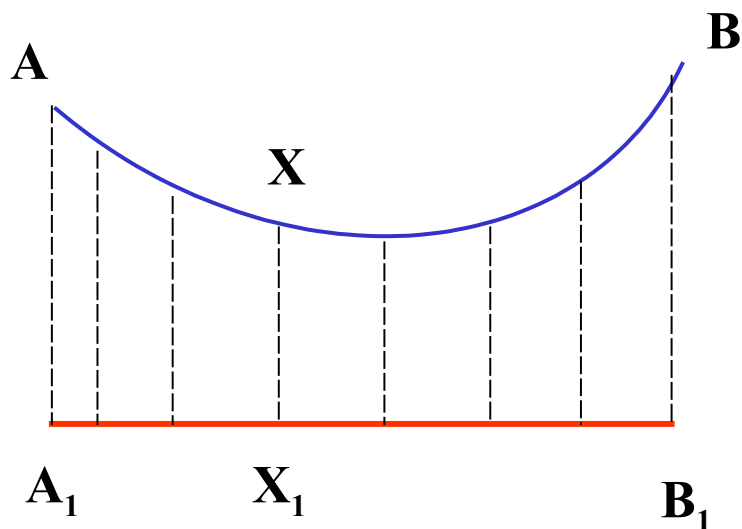
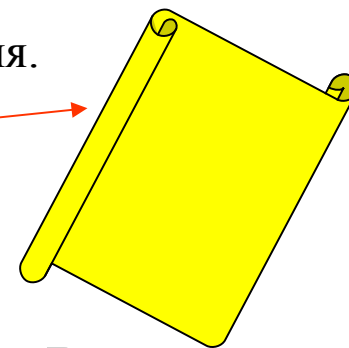


Біля джерел симетрії лежить математика:
щоб показати як працює математичне мислення,
навіть чи можливо знайти щось краще, ніж симетрія.
Г.Вейль

Перетворенням фігури F у фігуру F' називається така відповідність, при якій:

- 1) кожній точці фігури F відповідає єдина точка фігури F' ;
- 2) кожній точці фігури F' відповідає деяка точка фігури F ;
- 3) різним точкам фігури F відповідають різні точки фігури F' .

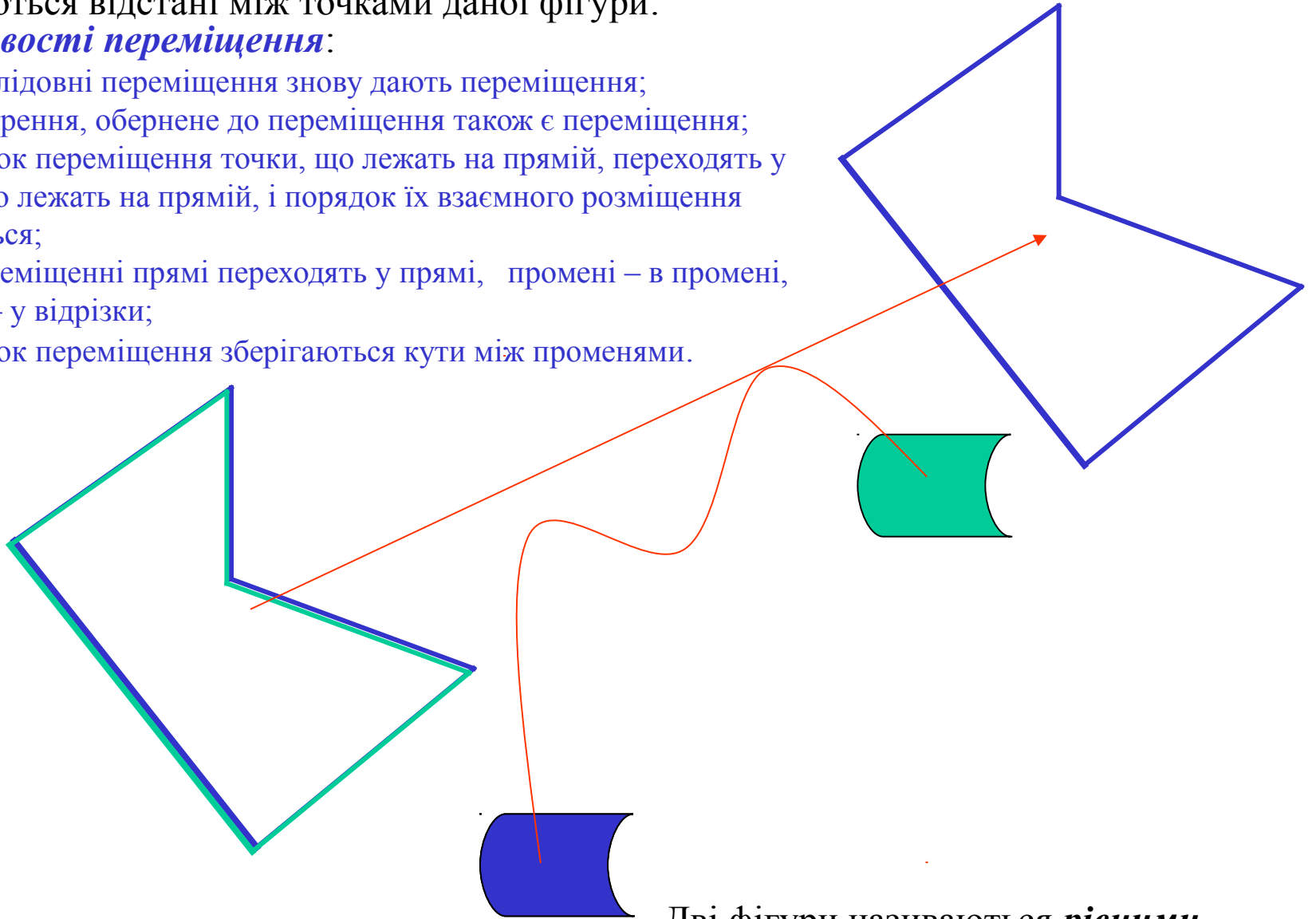
Фігура F' називається образом фігури F для даного перетворення.



Переміщенням (або *рухом*) називається перетворення фігури, внаслідок якого зберігаються відстані між точками даної фігури.

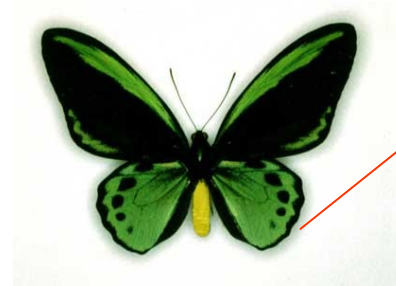
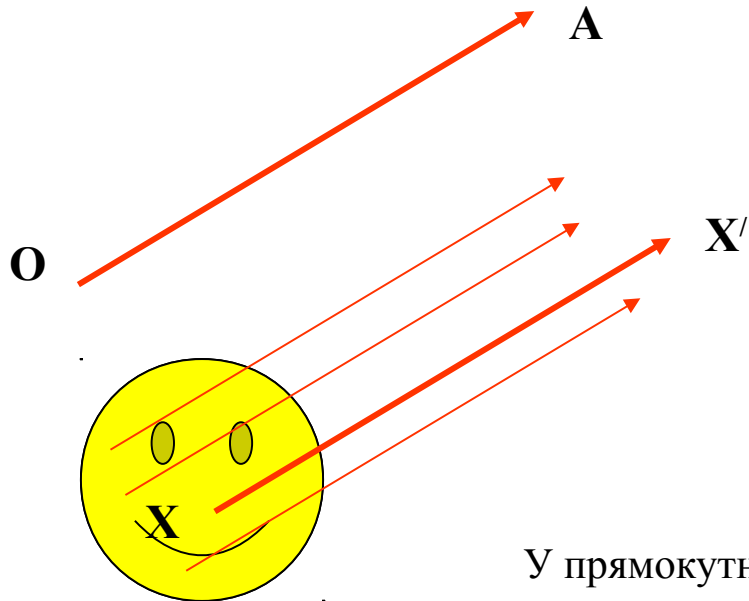
Властивості переміщення:

- ✓ два послідовні переміщення знову дають переміщення;
- ✓ перетворення, обернене до переміщення також є переміщення;
- ✓ внаслідок переміщення точки, що лежать на прямій, переходять у точки, що лежать на прямій, і порядок їх взаємного розміщення зберігається;
- ✓ при переміщенні прямі переходять у прямі, промені – в промені, відрізки – у відрізки;
- ✓ внаслідок переміщення зберігаються кути між променями.



Дві фігури називаються *рівними*, якщо вони суміщаються переміщенням

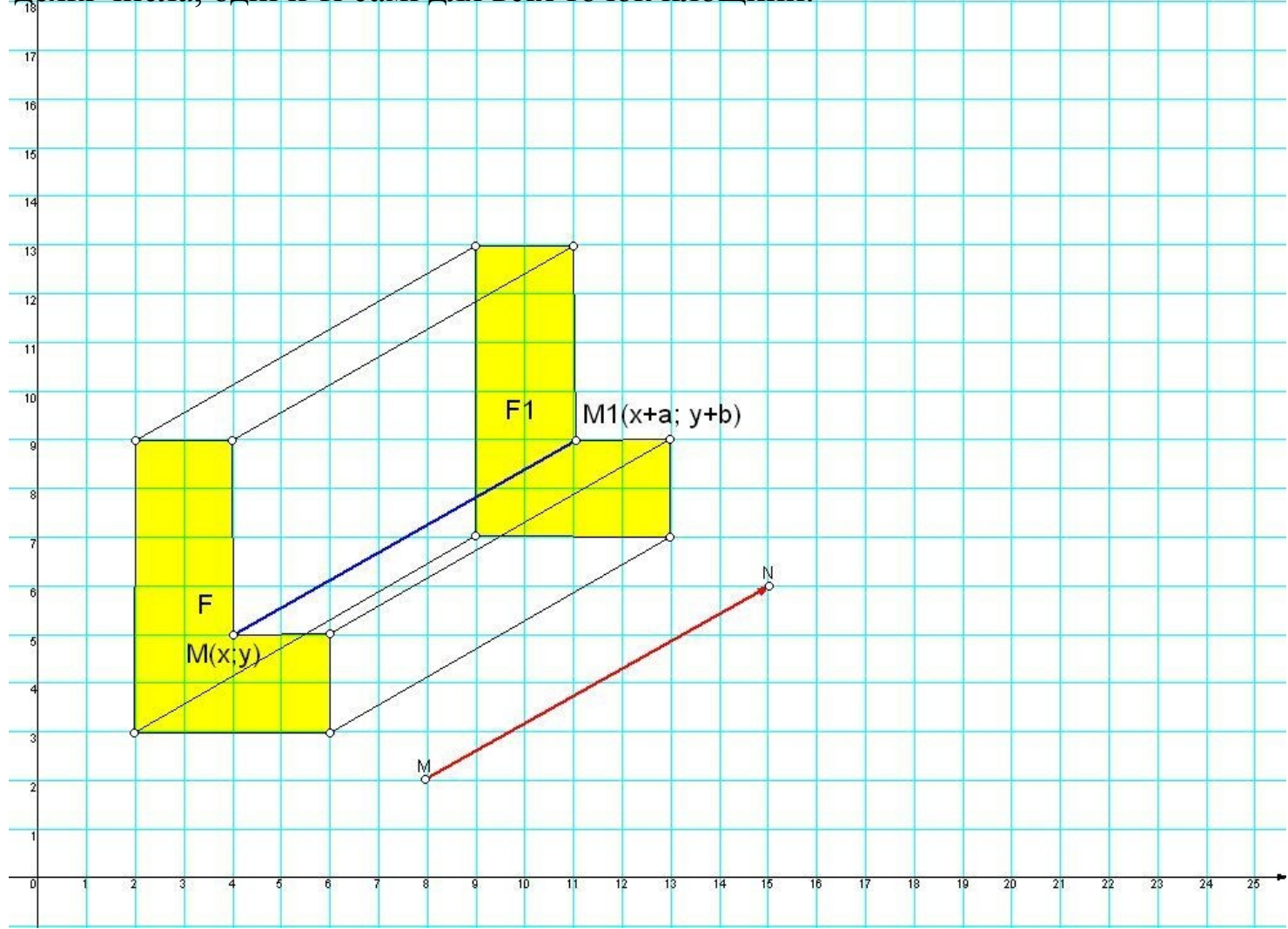
Паралельним перенесенням фігури F у напрямі променя OA на відстань a називається таке перетворення фігури F у фігуру F' , внаслідок якого кожна точка X фігури F переходить у точку X' фігури F' так, що промені XX' і OA співнапрямлені і $XX' = a$



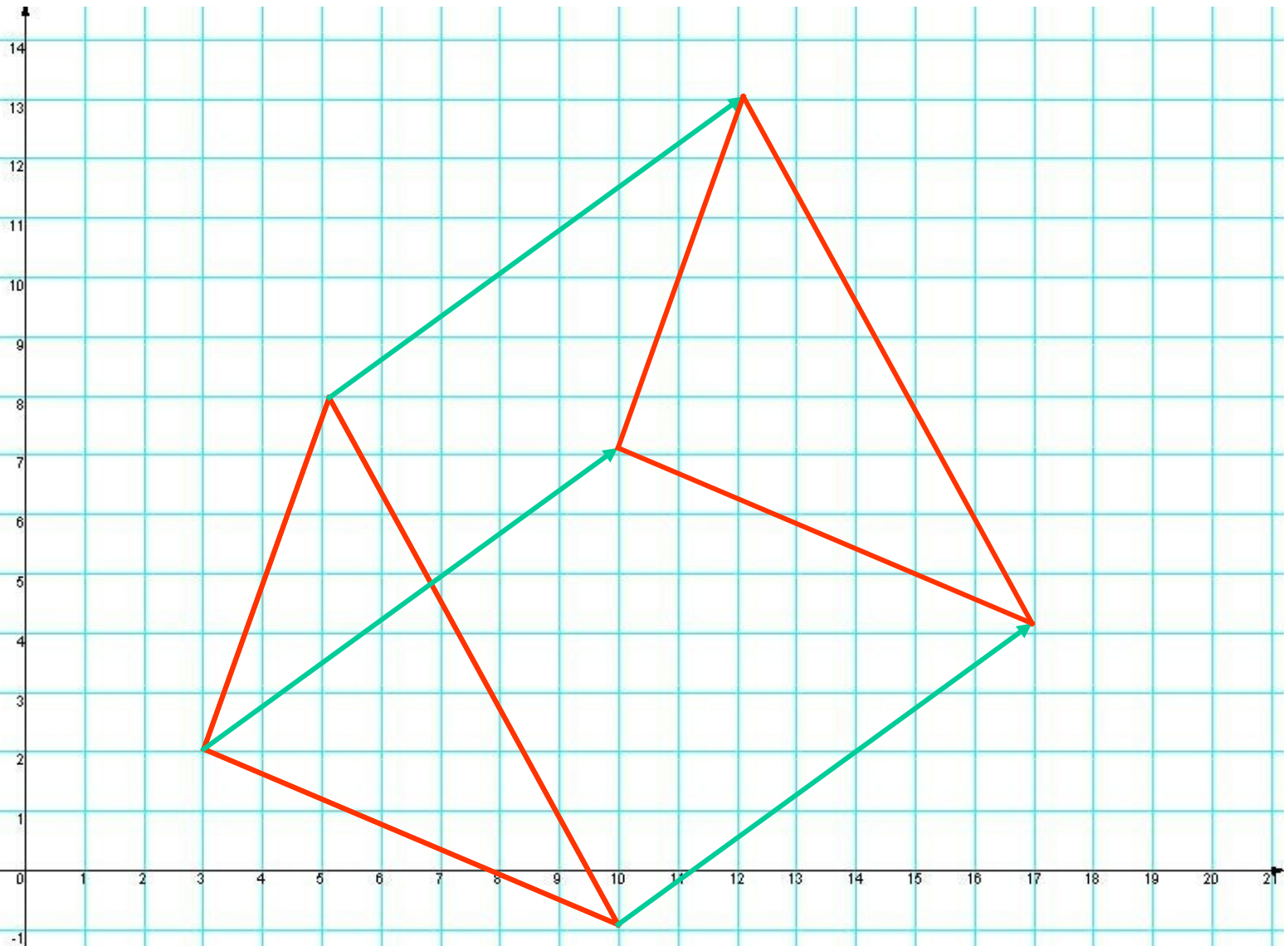
У прямокутній системі координат **паралельне перенесення**, яке переводить точку $(x; y)$ в точку $(x_1; y_1)$, задається формулами $x_1 = x + a$; $y_1 = y + b$, де a і b – деякі числа, одні й ті самі для всіх точок площини.

Основна властивість паралельного перенесення:
паралельне перенесення є переміщенням

У прямокутній системі координат **паралельне перенесення**, яке переводить точку $(x;y)$ в точку $(x_1; y_1)$, задається формулами $x_1=x+a; y_1=y+b$, де a і b – деякі числа, одні й ті самі для всіх точок площини.



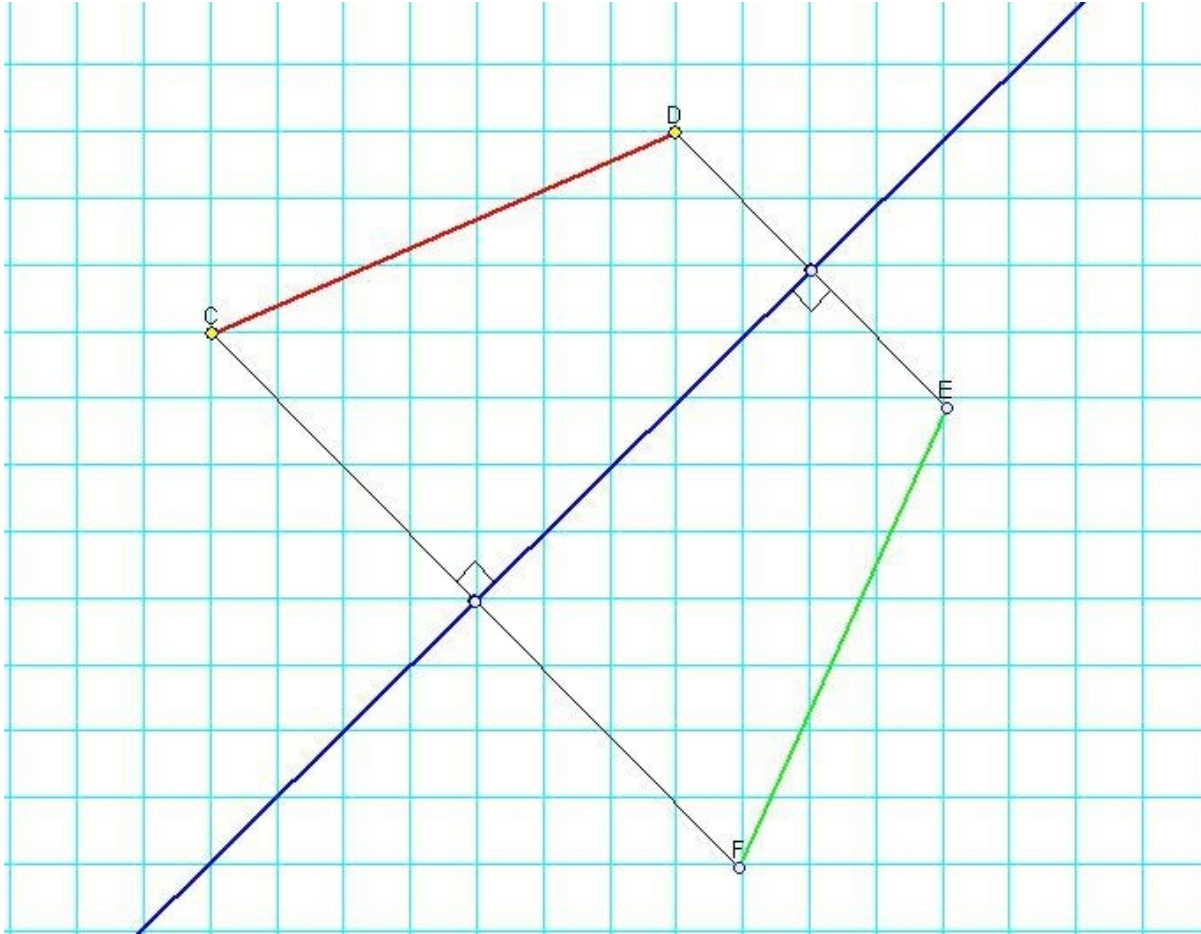
Основна властивість паралельного перенесення: паралельне перенесення є переміщенням



При паралельному перенесенні пряма переходить у паралельну пряму (або в себе); промінь переходить у співнапрямлений промінь.

При паралельному перенесенні точки переміщуються вздовж паралельних прямих (або однієї прямої) на ту саму відстань

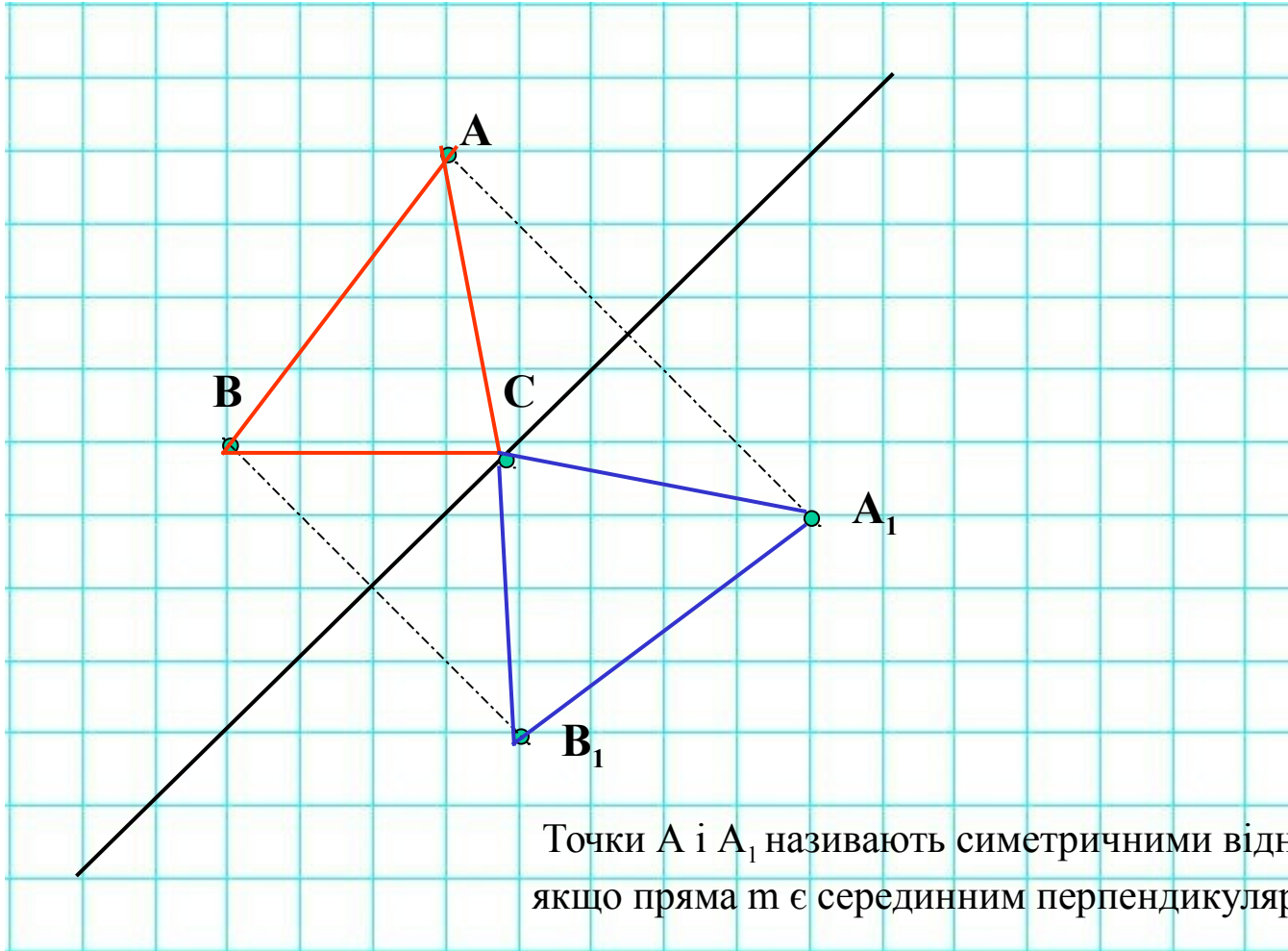
Перетворенням симетрії (осьовою симетрією) відносно прямої m називають таке перетворення фігури F у фігуру F_1 , внаслідок якого кожна точка X фігури F переходить у точку X_1 фігури F_1 , симетричну X відносно прямої m .



Основна властивість осьової симетрії:
Осьова симетрія є переміщенням

Осьова симетрія перетворює пряму на пряму; відрізок - на відрізок; багатокутник на рівний йому багатокутник.

Точки, що належать осі симетрії, відображаються самі на себе.



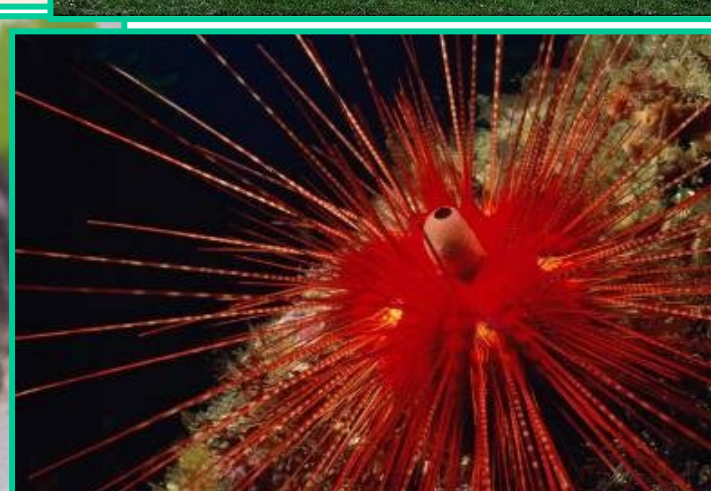
Точки A і A_1 називають симетричними відносно прямої m , якщо пряма m є серединним перпендикуляром відрізка AA_1 .

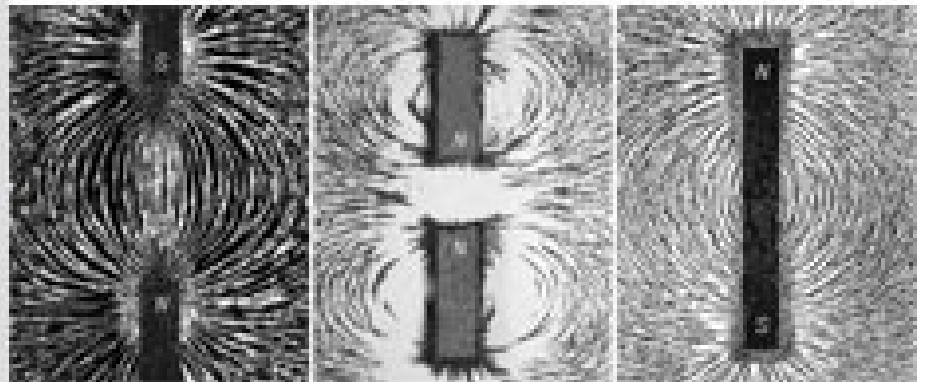
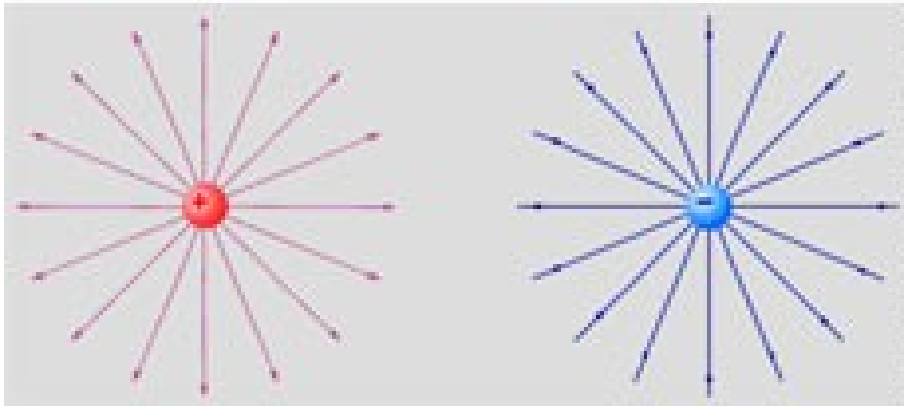
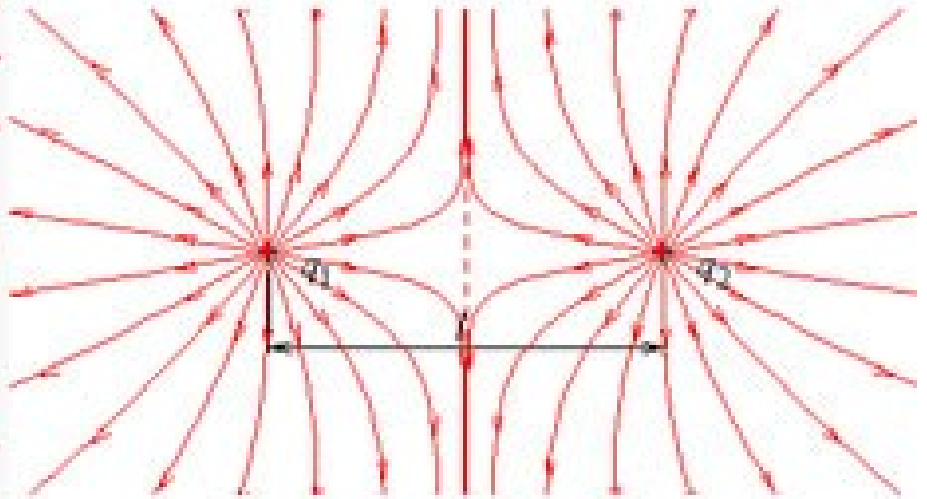
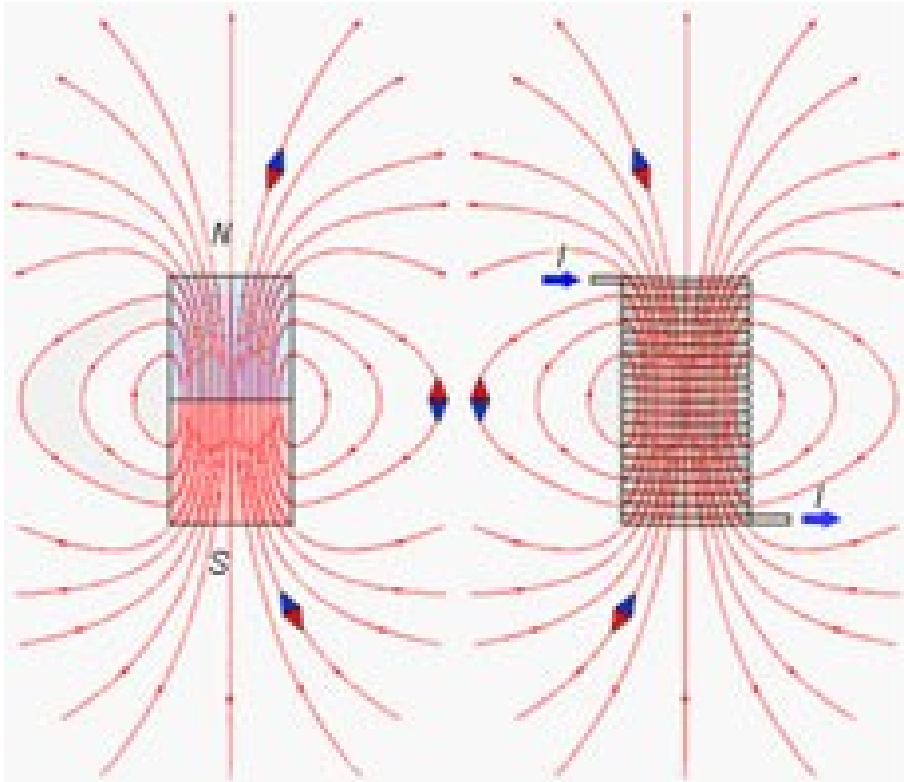
Основна властивість осьової симетрії:
Осьова симетрія є переміщенням



Симетричний Тадж Махал

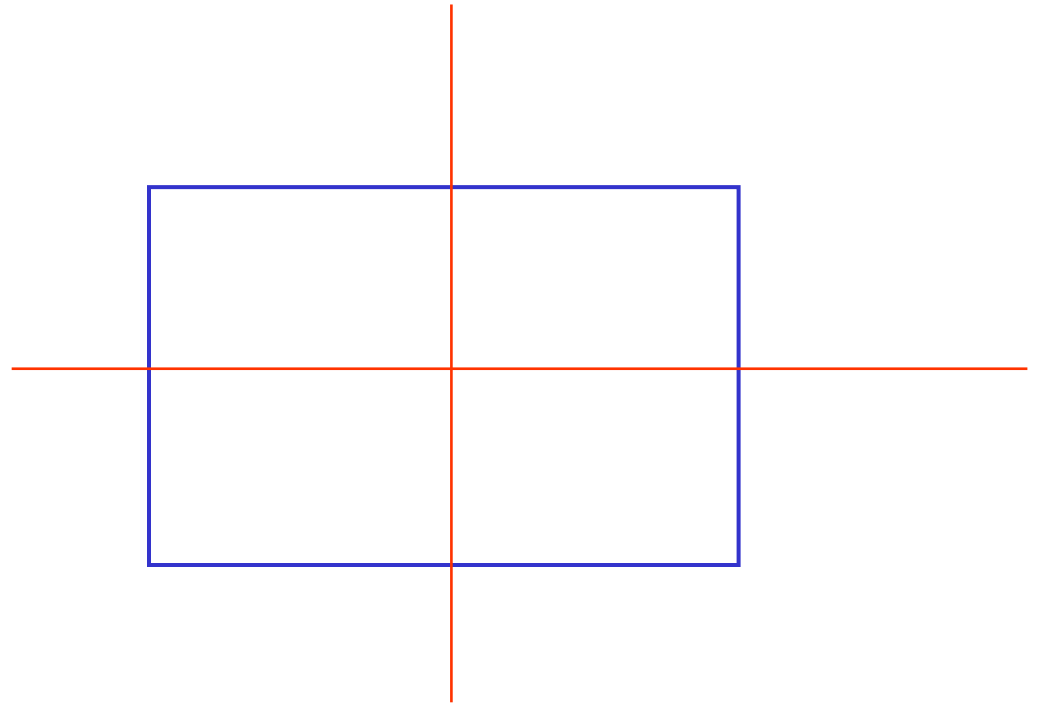
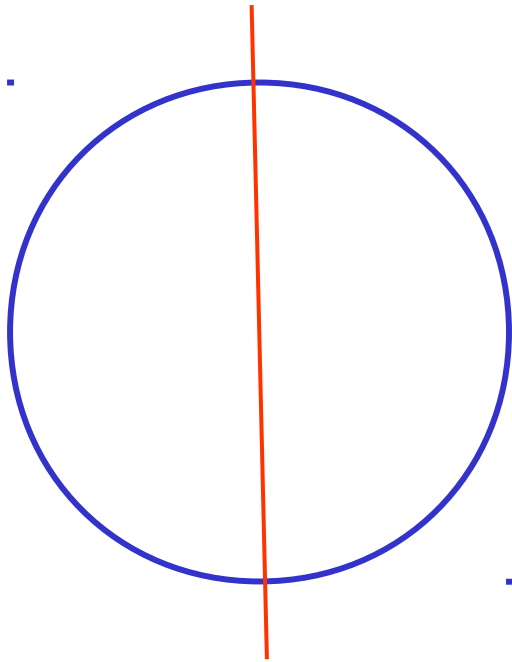






Симетрія ліній електричного та магнітного полів

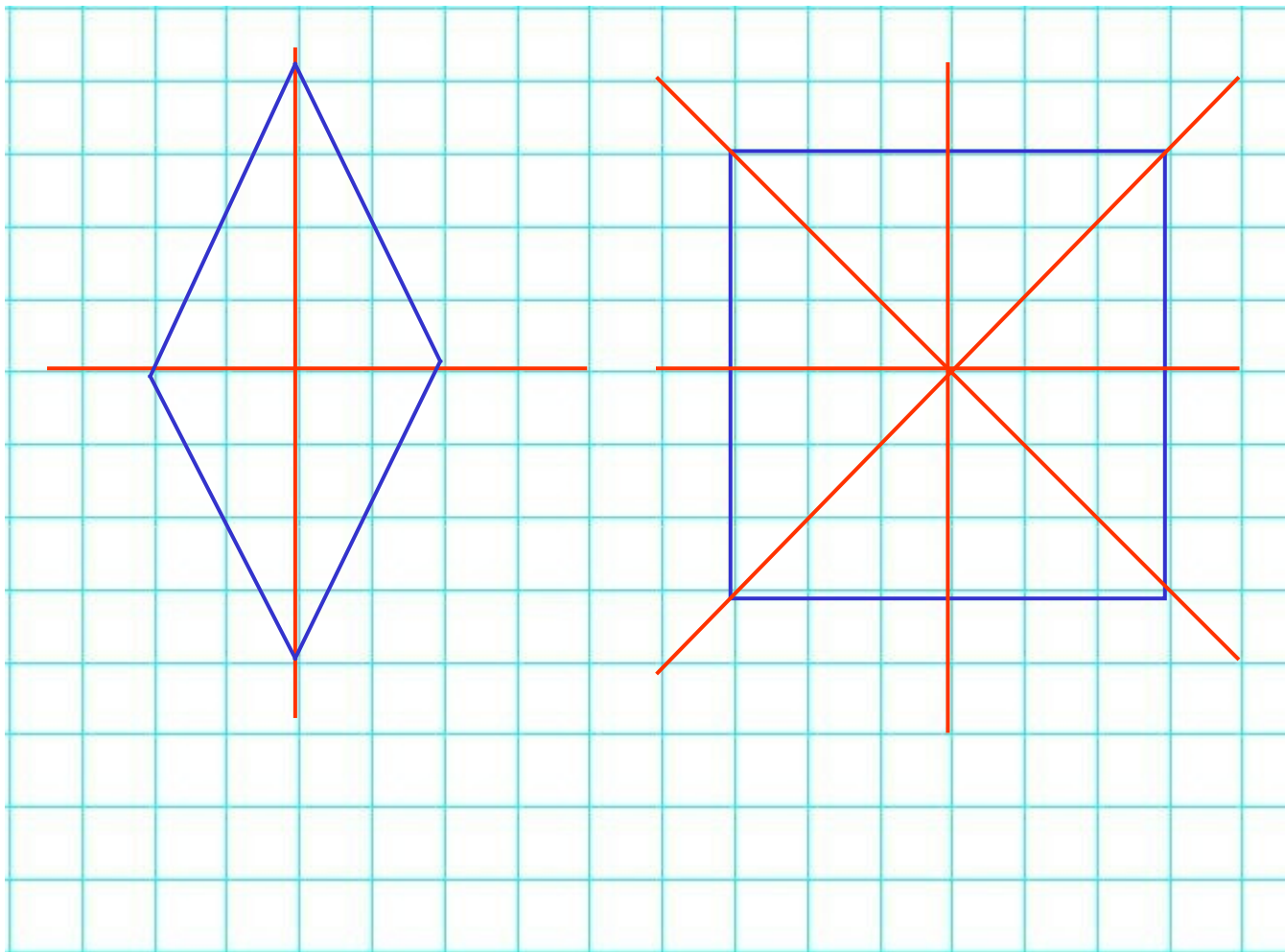
Якщо перетворення симетрії відносно прямої m переводить фігуру F у себе, то така фігура називається симетричною відносно прямої m , а сама пряма m – вісю симетрії фігури F .



Скільки осей симетрії має коло?

Скільки осей симетрії має прямокутник?

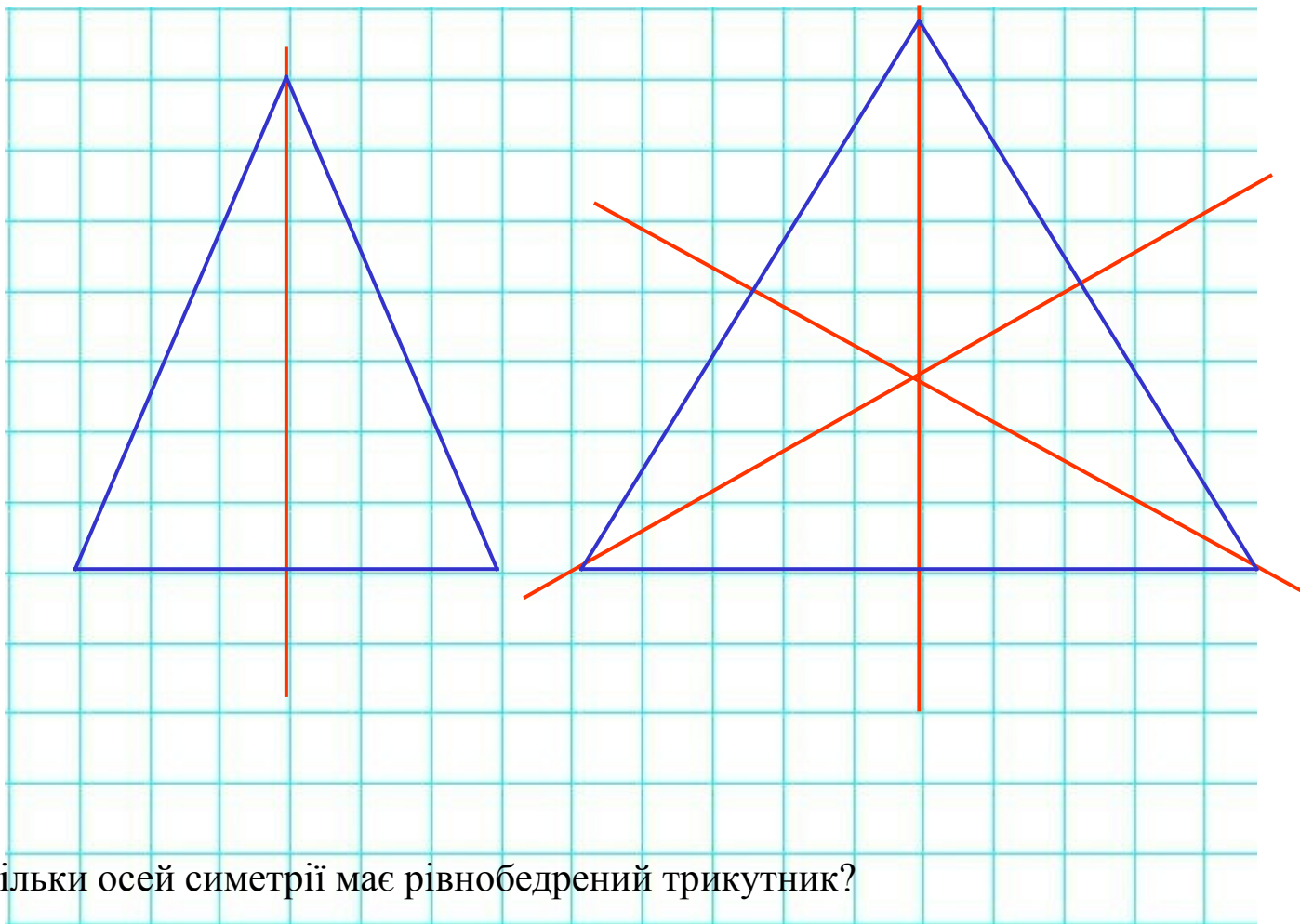
Якщо перетворення симетрії відносно прямої m переводить фігуру F у себе, то така фігура називається симетричною відносно прямої m , а сама пряма m – віссю симетрії фігури F .



Скільки осей симетрії має ромб?

Скільки осей симетрії має квадрат?

Якщо перетворення симетрії відносно прямої m переводить фігуру F у себе, то така фігура називається симетричною відносно прямої m , а сама пряма m – віссю симетрії фігури F .

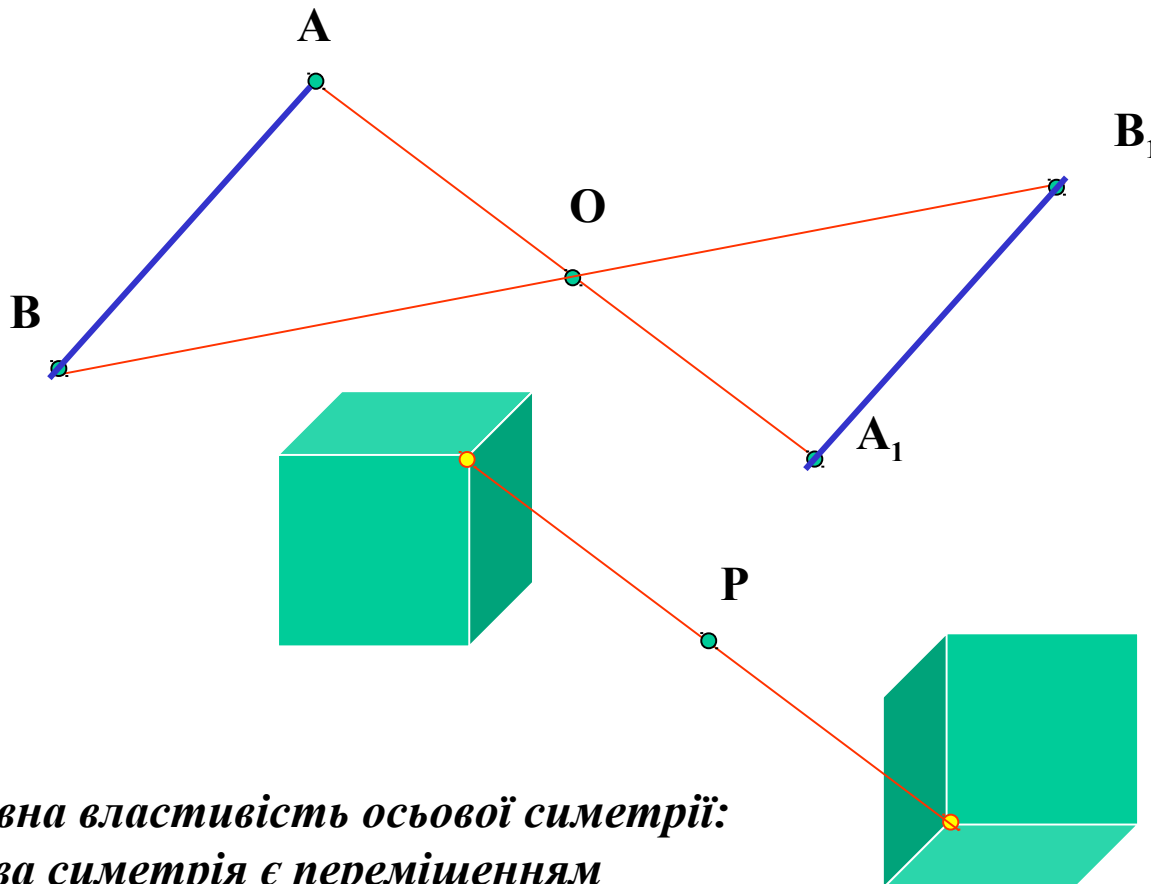


Скільки осей симетрії має рівнобедрений трикутник?

Скільки осей симетрії має рівносторонній трикутник?

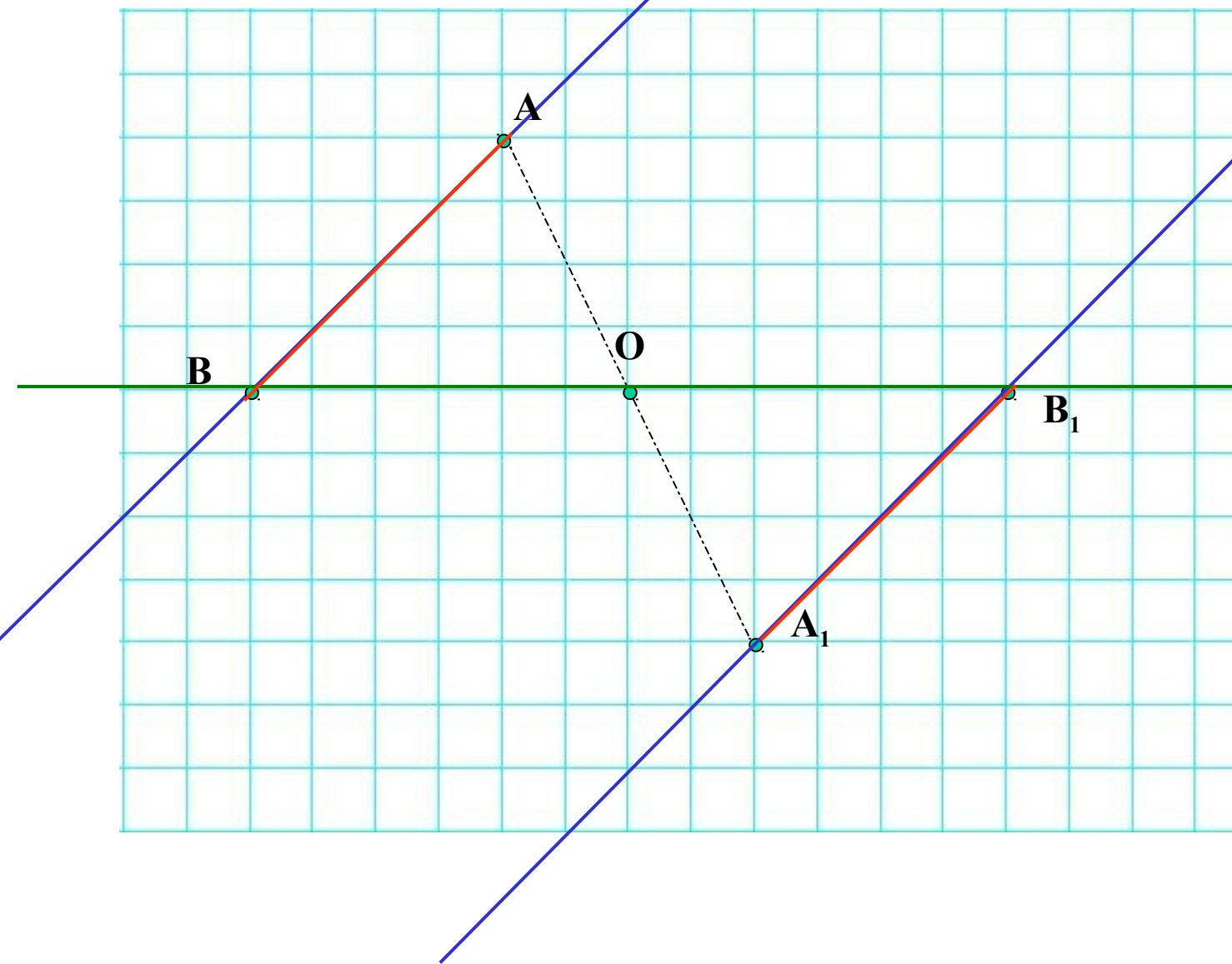
Точки A і A_1 називають *симетричними відносно точки O* , якщо точка O є серединою відрізка AA_1 .

Перетворенням симетрії (центральною симетрією) відносно точки O називається таке перетворення фігури F у фігуру F_1 , внаслідок якого кожна точка X фігури F переходить у точку X_1 фігури F_1 , симетричну X відносно точки O .



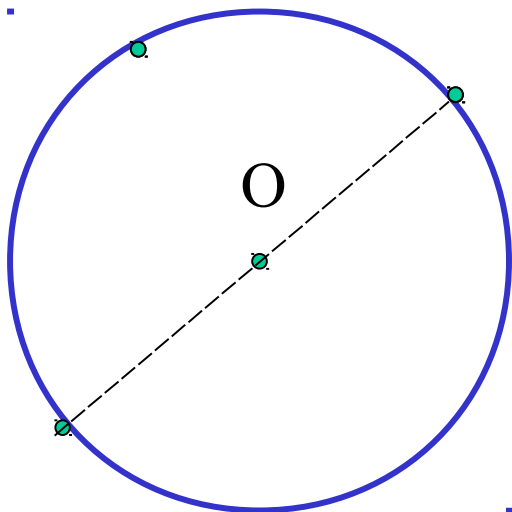
*Основна властивість осьової симетрії:
Осьова симетрія є переміщенням*

Центральна симетрія перетворює пряму на паралельну їй пряму або в ту ж саму пряму;
відрізок - на відрізок; багатокутник на рівний йому багатокутник.

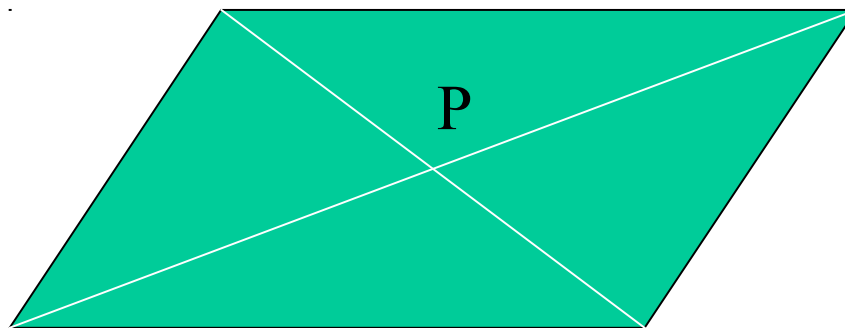


Фігуру називають **симетричною відносно точки O** , якщо для кожної точки даної фігури точка, симетрична їй відносно точки O , також належить цій фігурі.

Якщо перетворення симетрії відносно точки O переводить фігуру F у себе, то така фігура називається **центрально-симетричною**, а точка O – центром симетрії фігури F .



Центр кола є його центром симетрії

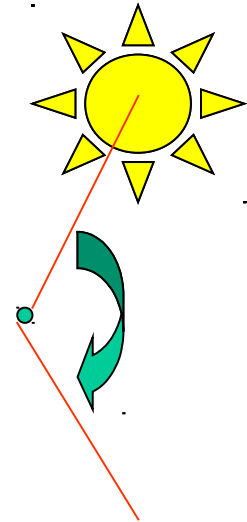
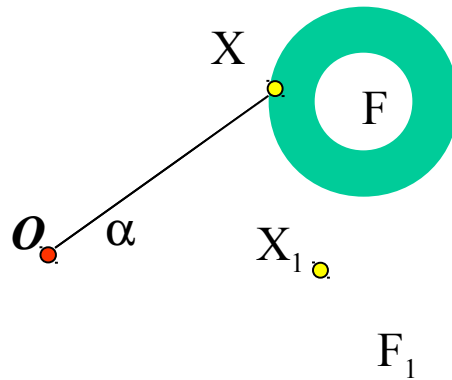


Точка перетину діагоналей паралелограма є його центром симетрії



Поворотом фігури F **навколо точки O на кут α** називається перетворення фігури F у фігуру F_1 , внаслідок якого кожна точка X фігури F переходить у точку X_1 фігури F_1 так, що $OX_1 = OX$ і $\angle XOX_1 = \alpha$.

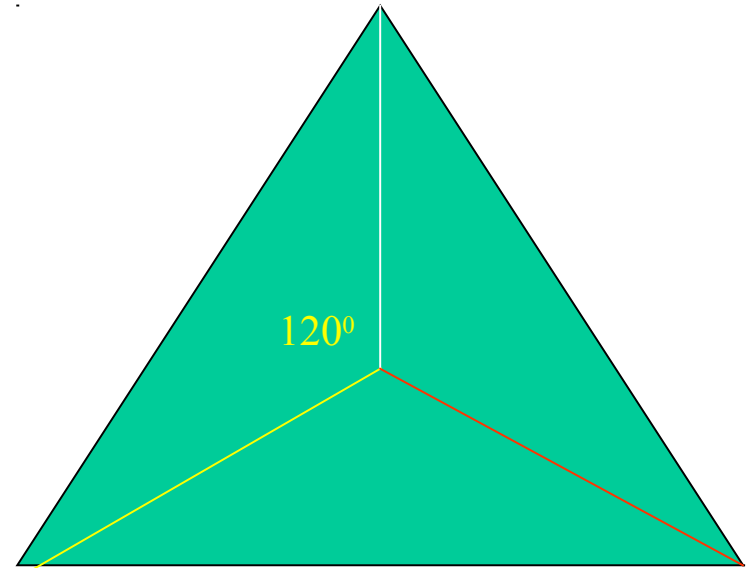
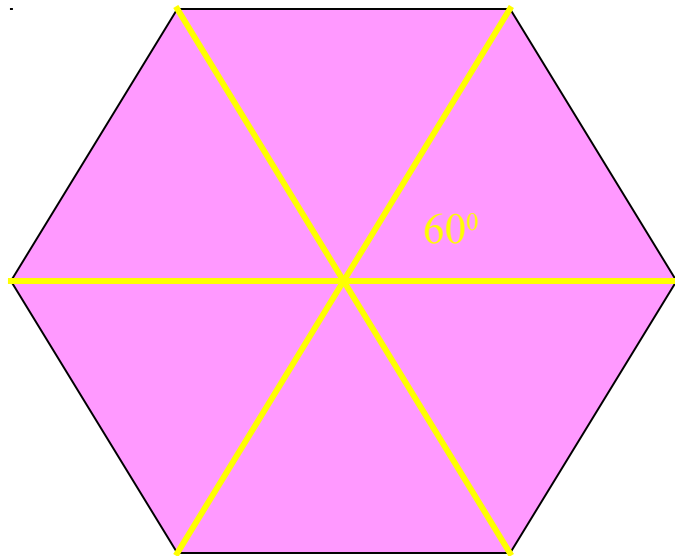
Точку O називають центром повороту, а кут α – кутом повороту.



Основна властивість повороту: поворот є переміщенням.

Тобто якщо фігура F_1 – образ фігури F при повороті, то $F = F_1$

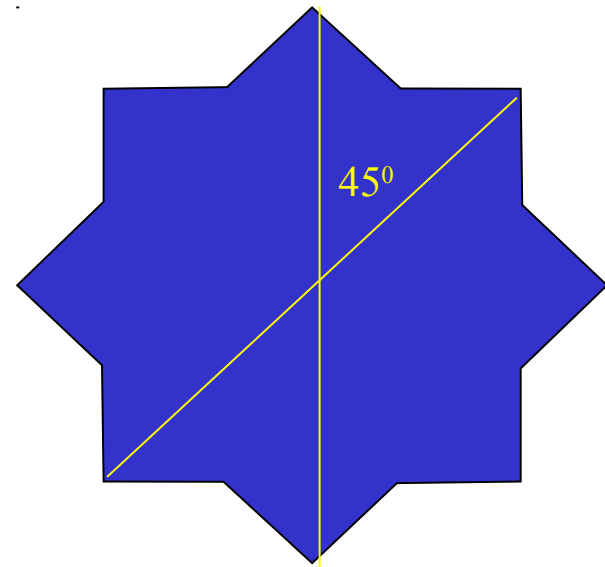
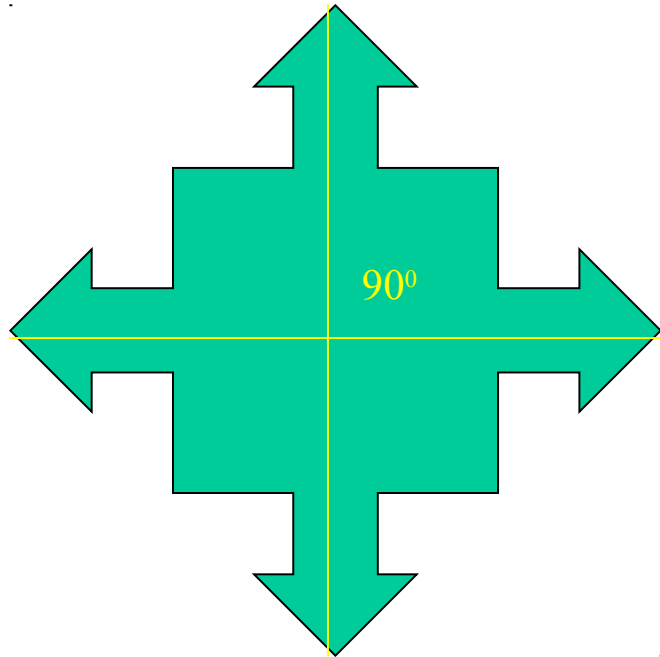
Якщо внаслідок повороту навколо деякої точки O фігура F переходить у себе, то кажуть, що ця фігура має *поворотну симетрію* (або *симетрію обертання*).



Правильний шестикутник переходить у себе при поворотах на кути кратні 60°

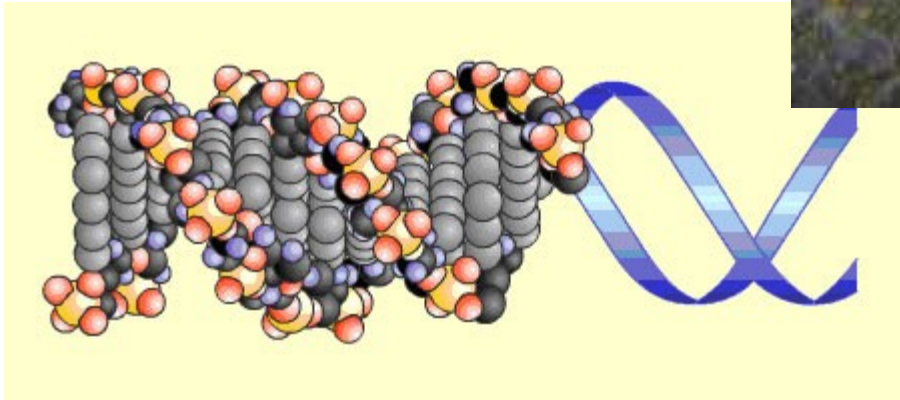
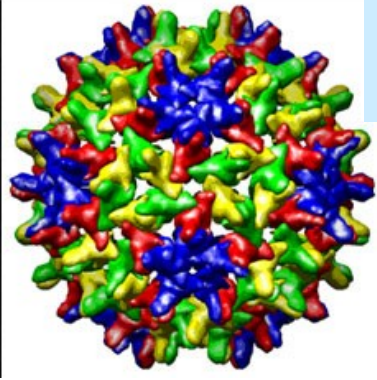
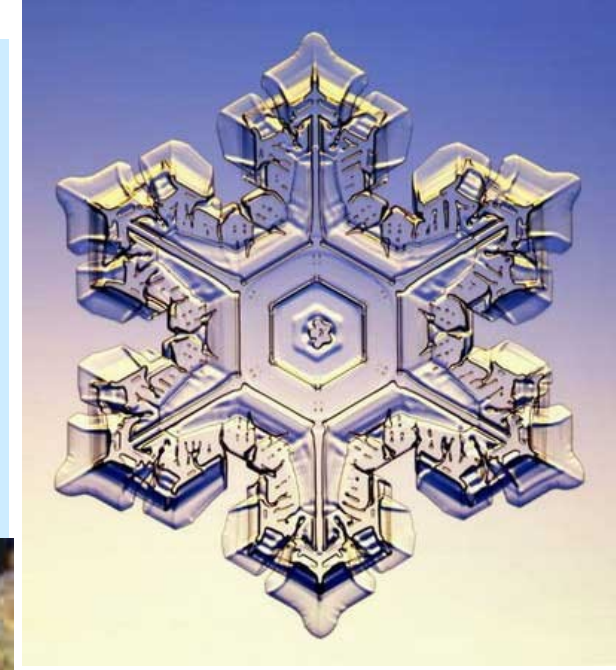
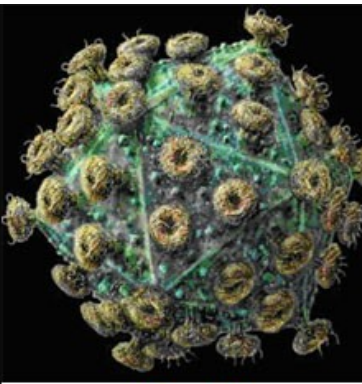
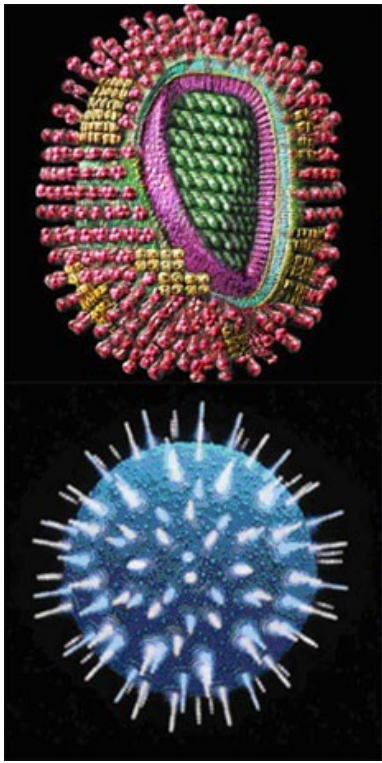
Правильний трикутник переходить у себе при поворотах на кути кратні 120°


Якщо внаслідок повороту навколо деякої точки O фігура F переходить у себе, то кажуть, що ця фігура має *поворотну симетрію* (або *симетрію обертання*).




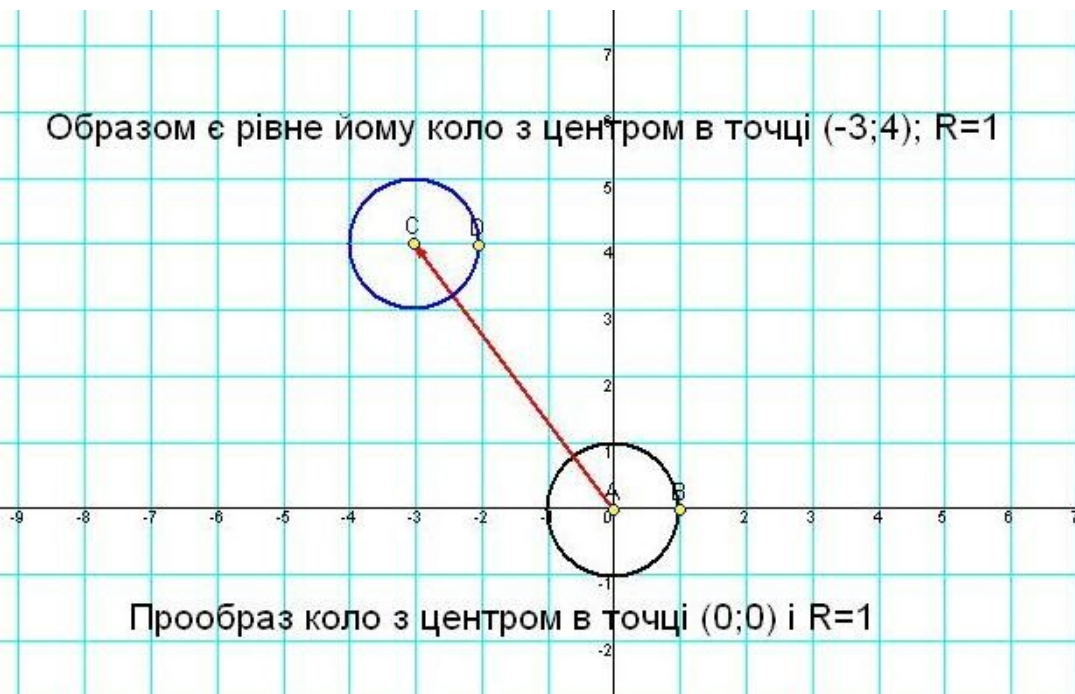
Фігура, що має дві осі симетрії, переходить у себе при поворотах на кути кратні 90°

Фігура переходить сама в себе при поворотах на кути кратні 45°

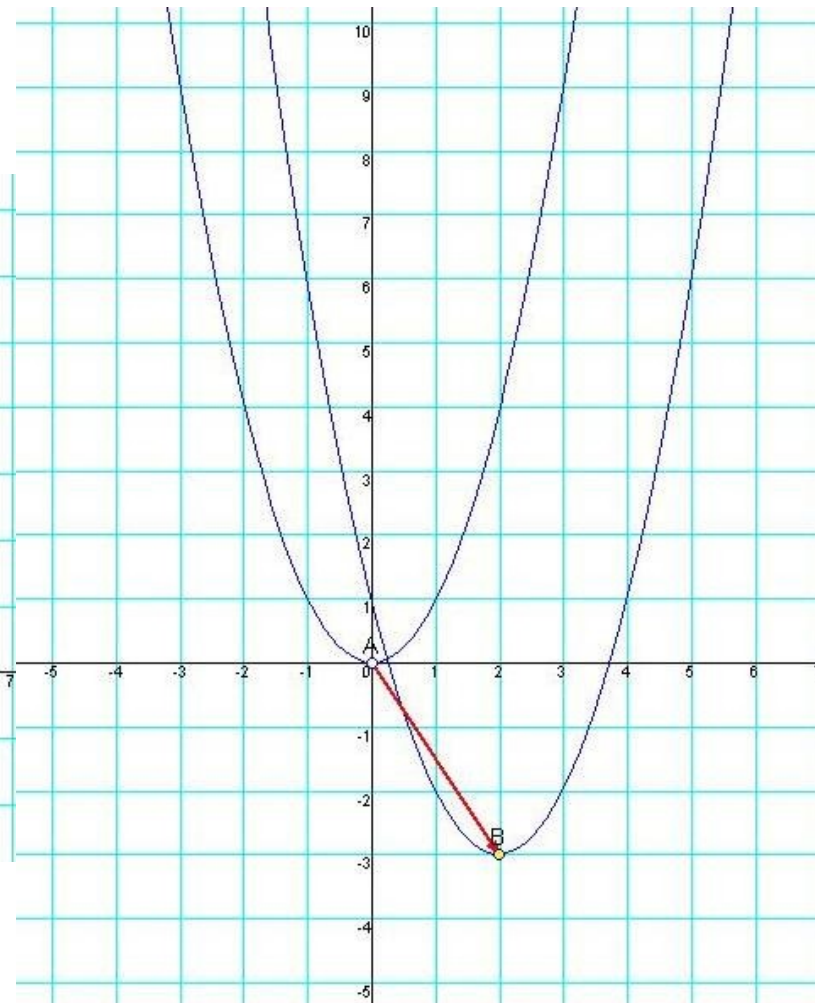


Задача 649. Знайдіть рівняння кола, яке є образом кола $x^2+y^2=1$ при паралельному перенесенні на вектор $a(-3;4)$ 

Задача 650. Знайдіть рівняння параболи, яка є образом параболи $y=x^2$ при паралельному перенесенні на вектор $a(2; -3)$ 



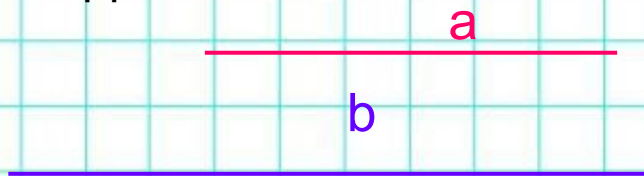
$x^2+y^2=1$ перейде в коло $(x+3)^2+(y-4)^2=1$



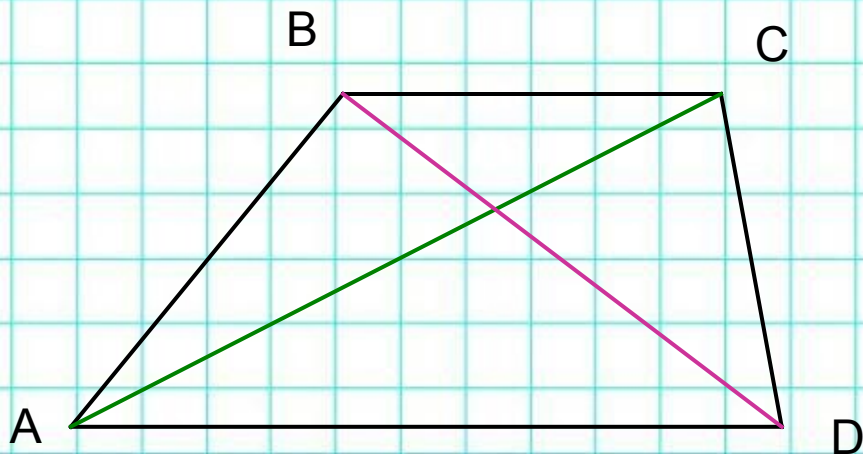
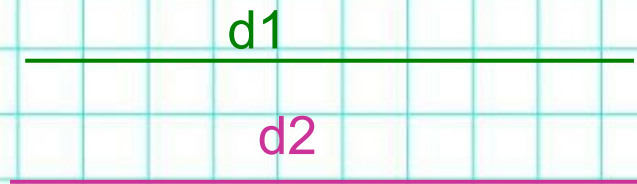
$y=x^2$ перейде в параболу $y=(x-2)^2-3$

Задача 651. Побудуйте трапецію за основами і діагоналями.

Дано: основи трапеції

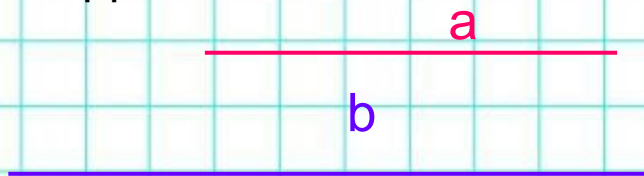


діагоналі трапеції

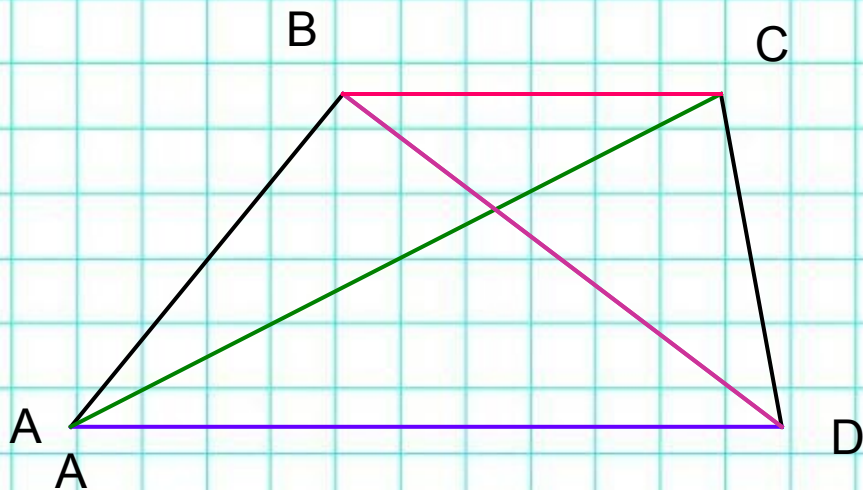
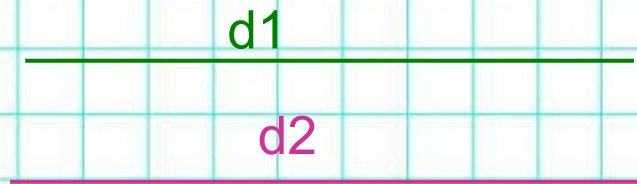


Задача 651. Побудуйте трапецію за основами і діагоналями.

Дано: основи трапеції



діагоналі трапеції



К

Як утворити трикутник з відомими довжинами сторін?



Самостійна робота

Варіант 1

Задача 1. Точки A і B лежать в різних півплощинах відносно прямої a . Знайдіть на прямій a таку точку X , щоб пряма a містила бісектрису кута $AХВ$.

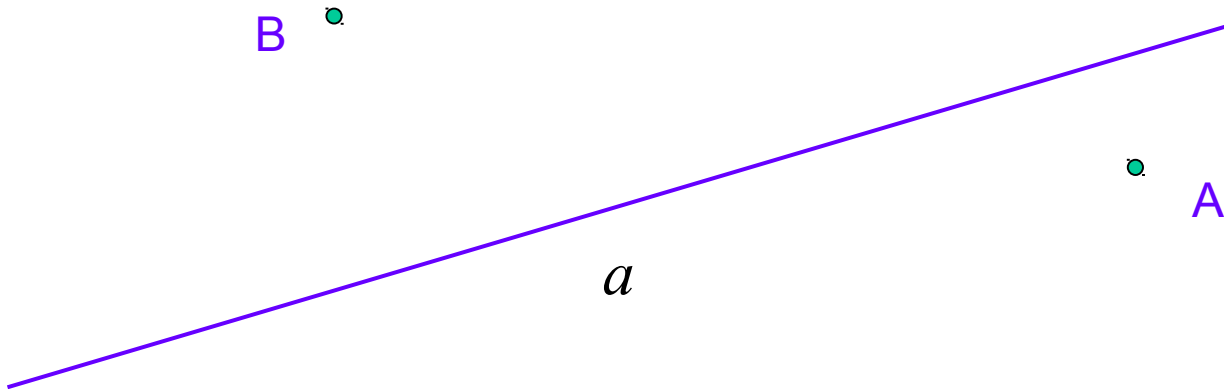
Задача 2. Побудуйте відрізок, серединою якого є дана точка, а кінці належать даним непаралельним прямим.

Варіант 2

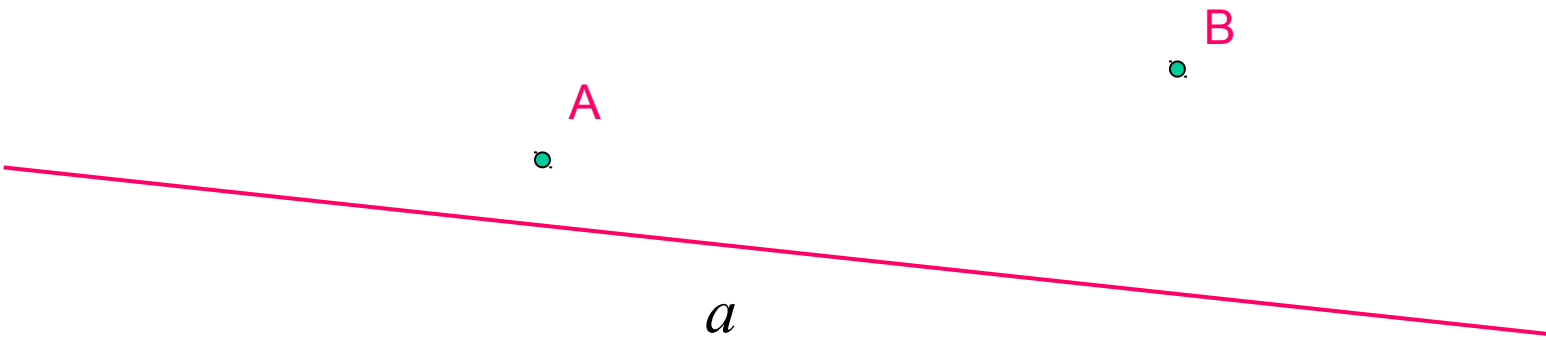
Задача 1. Точки A і B лежать в одній півплощині відносно прямої a . Знайдіть на прямій a таку точку X , щоб промені XA і XB утворювали з прямою рівні кути.

Задача 2. Точка M належить куту ABC і не належить його сторонам. Побудуйте рівнобедрений прямокутний трикутник, вершиною прямого кута якого є точка M , а дві інші належать сторонам BA і BC відповідно.

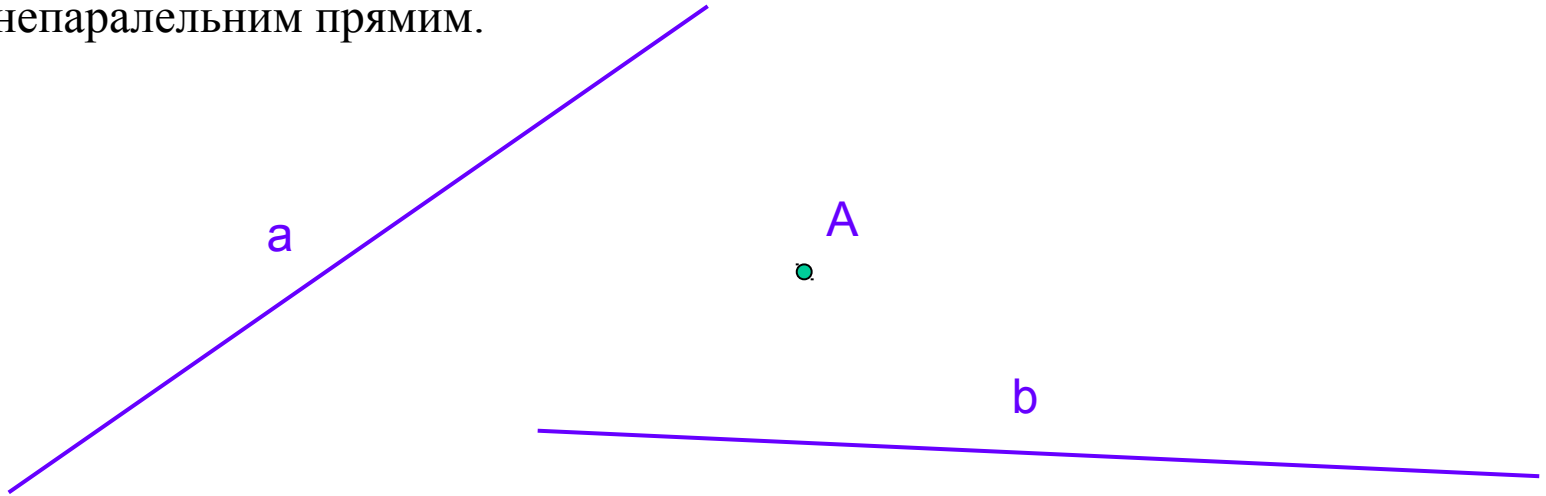
Задача 1(варіант 1). Точки A і B лежать в різних півплощинах відносно прямої a . Знайдіть на прямій a таку точку X , щоб пряма a містила бісектрису кута AXB .



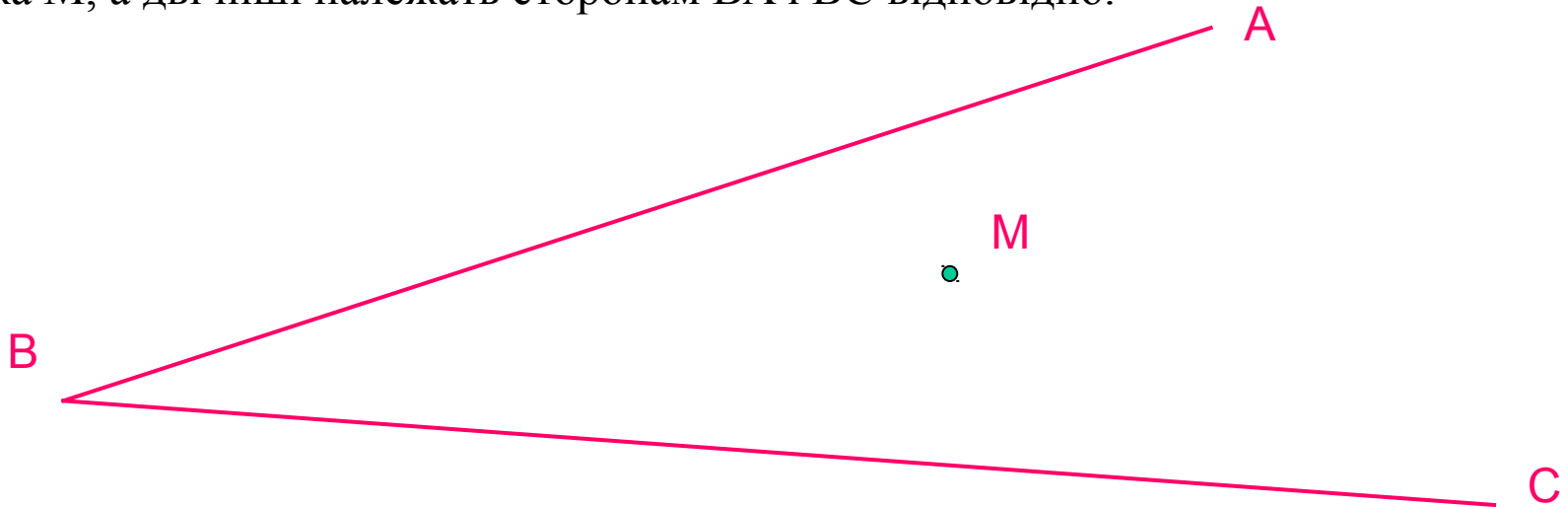
Задача 1(варіант 2). Точки A і B лежать в одній півплощині відносно прямої a . Знайдіть на прямій a таку точку X , щоб промені XA і XB утворювали з прямою рівні кути.



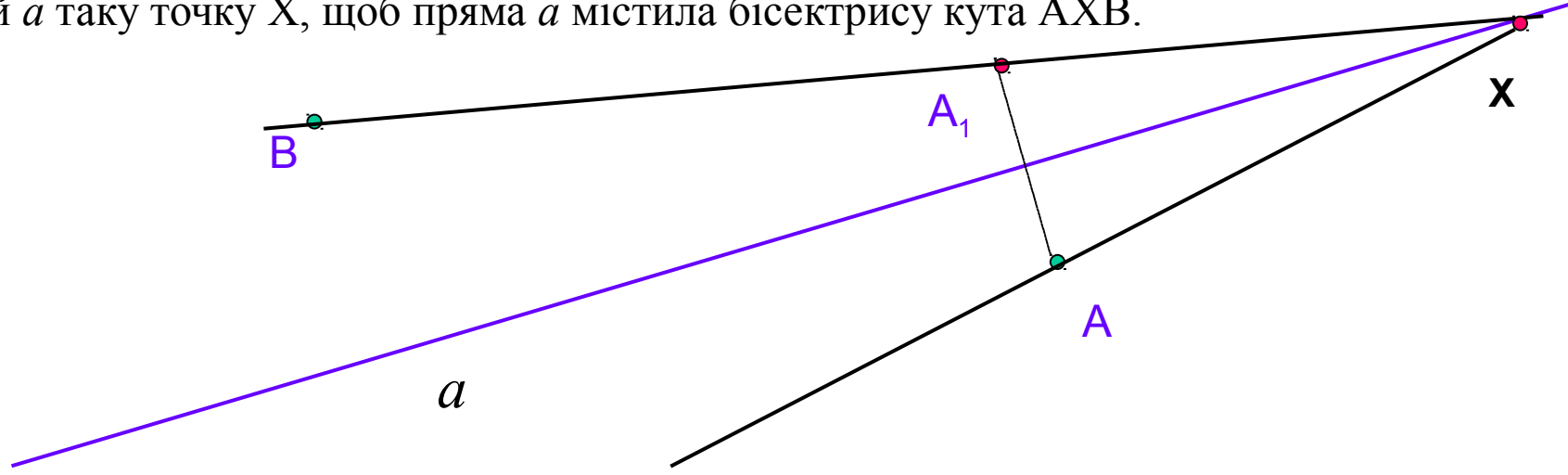
Задача 2(варіант 1). Побудуйте відрізок, серединою якого є дана точка, а кінці належать даним непаралельним прямим.



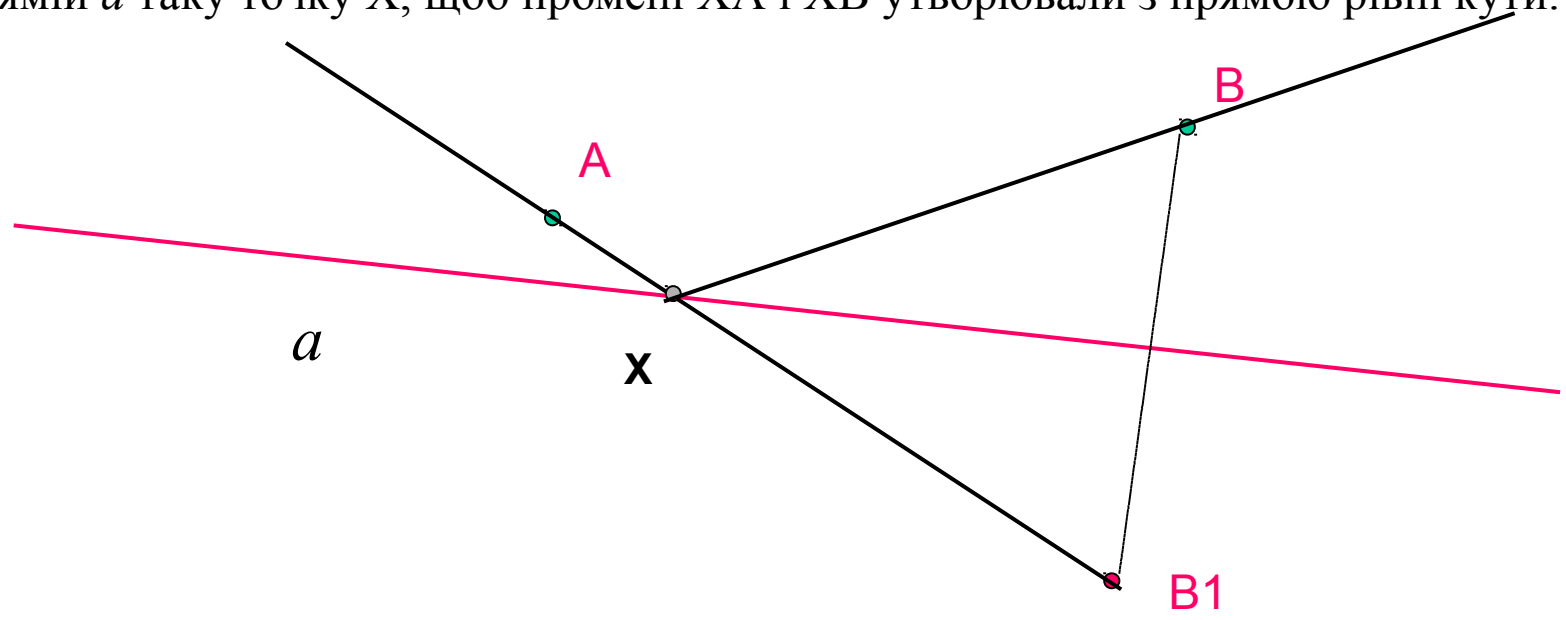
Задача 2 (варіант 2). Точка M належить куту ABC і не належить його сторонам. Побудуйте рівнобедрений прямокутний трикутник, вершиною прямого кута якого є точка M , а дві інші належать сторонам BA і BC відповідно.



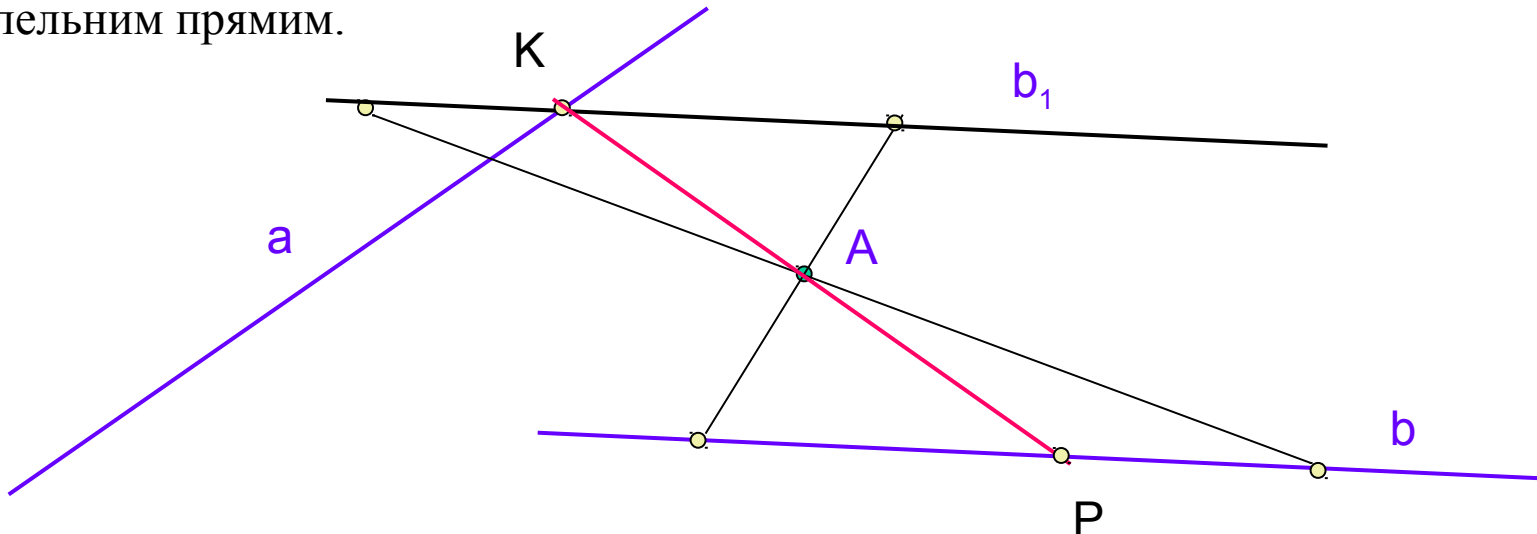
Задача 716. Точки A і B лежать в різних півплощинах відносно прямої a . Знайдіть на прямій a таку точку X , щоб пряма a містила бісектрису кута AXB .



Задача 717. Точки A і B лежать в одній півплощині відносно прямої a . Знайдіть на прямій a таку точку X , щоб промені XA і XB утворювали з прямою рівні кути.



Задача 721. Побудуйте відрізок, серединою якого є дана точка, а кінці належать даним непаралельним прямим.



Задача 722. Точка M належить куту ABC і не належить його сторонам. Побудуйте рівнобедрений прямокутний трикутник, вершиною прямого кута якого є точка M , а дві інші належать сторонам BA і BC відповідно.

