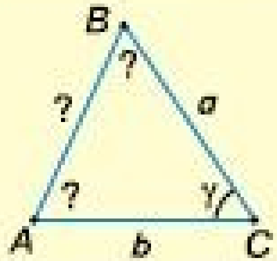
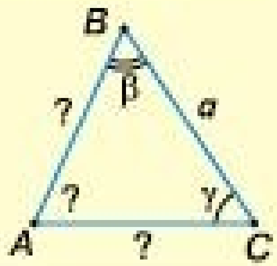
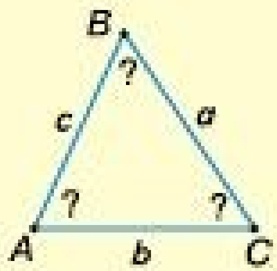
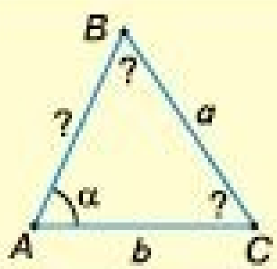
Застосування розв’язування трикутників у прикладних задачах

Алгоритми розв'язування трикутників наведено в таблиці 4.

Таблиця 4

Умова задачі		Алгоритм розв'язування
	Дано: $AC = b$, $BC = a$, $\angle C = \gamma$. Знайти: AB, $\angle A$, $\angle B$.	1) $\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}$, 2) $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, 3) $\angle B = 180^\circ - \angle A$
	Дано: $BC = a$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$. Знайти: AC, AB, $\angle A$.	1) $\angle A = 180^\circ - \beta - \gamma$, 2) $AC = \dfrac{a\sin\beta}{\sin A}$, 3) $AB = \dfrac{a\cdot\sin\gamma}{\sin A}$.
	Дано: $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Знайти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.	1) $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, 2) $\cos B = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, 3) $\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B$.
	Дано: $BC = a$, $AC = b$, $\angle A = \alpha$. Знайти: AB, $\angle B$, $\angle C$.	1) $\sin B = \dfrac{b\sin\alpha}{a}$, 2) $\angle C = 180^\circ - \alpha - \angle B$, 3) $AB = \dfrac{a\sin C}{\sin\alpha}$.

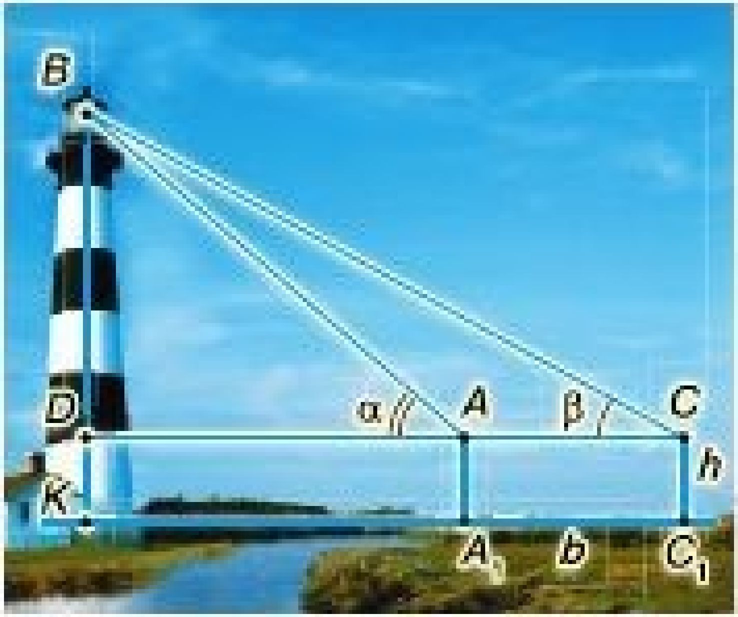
1. Задачі на знаходження висоти предмета, основа якого недоступна.

Задача. Знайдіть висоту вежі, яка відокремлена від вас річкою (мал. 1).

Розв'язання. На горизонтальній прямій, яка проходить через основу вежі, позначимо дві точки A_1 і C_1. Вимірюємо $A_1C_1 = b$, $\angle DAB = \alpha$ і $\angle DCB = \beta$. За теоремою синусів, з трикутника ABC дістанемо:

$$AB = \frac{AC \cdot \sin\beta}{\sin B}.$$

З прямокутного трикутника ABD: $BD = AB \cdot \sin\alpha$.



Мал. 1

Отже, $BD = \dfrac{b \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)}$.

Додавши до BD висоту приладу $AA_1 = DK = h$, яким вимірювали кути, дістанемо формулу для обчислення висоти вежі:

$$BK = BD + DK = \frac{b \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)} + h.$$

Нехай результати вимірювання такі: $b = 12$ м, $h = 1,5$ м, $\alpha = 42^\circ$, $\beta = 37^\circ$.

Тоді $BK = \dfrac{12 \cdot \sin 42^\circ \cdot \sin 37^\circ}{\sin 5^\circ} + 1,5 \approx \dfrac{12 \cdot 0,6691 \cdot 0,6018}{0,0872} + 1,5 \approx 56,9$ (м).

2. Задачі на знаходження відстані до недоступного пункту.

Задача. Знайдіть відстань від пункту A до недоступного пункту B (мал. 2).

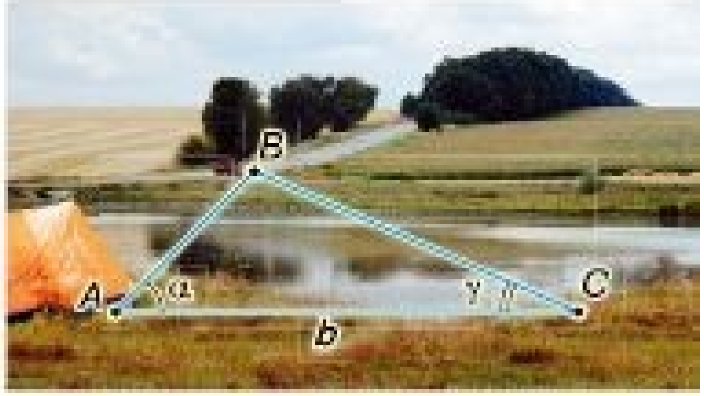
Розв'язання. Обираємо на місцевості таку точку C, щоб з неї було видно пункт B і можна було виміряти відстань AC.

Вимірюємо $AC = b$, $\angle BAC = \alpha$, $BCA = \gamma$. Знаходимо $\angle B = 180^\circ - \alpha - \gamma$.

За теоремою синусів: $AB = \dfrac{b \cdot \sin\gamma}{\sin(180^\circ - (\alpha + \gamma))} = \dfrac{b \sin\gamma}{\sin(\alpha + \gamma)}$.

Нехай результати вимірювання такі: $b = 90$ м, $\alpha = 46^\circ$, $\gamma = 25^\circ$.

Тоді $AB = \dfrac{90 \cdot \sin 25^\circ}{\sin 71^\circ} \approx \dfrac{90 \cdot 0{,}4226}{0{,}9455} \approx 40{,}2$ (м).



Мал. 2

3. Задачі на знаходження відстані між двома доступними пунктами (якщо безпосереднє вимірювання неможливе).

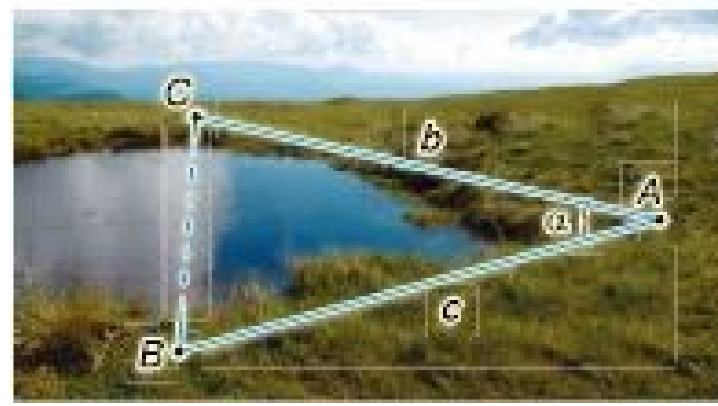
Задача. Знайдіть відстань між пунктами B і C, розділеними ставком (мал. 3).

Розв'язання. Обираємо на місцевості точку A так, щоб можна було виміряти відстані AB і AC. Вимірюємо $AB = c$, $AC = b$ і $\angle BAC = \alpha$.

За теоремою косинусів: $BC = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$.

Нехай результати вимірювання такі: $b = 88$ м, $c = 90$ м, $\alpha = 28°$.

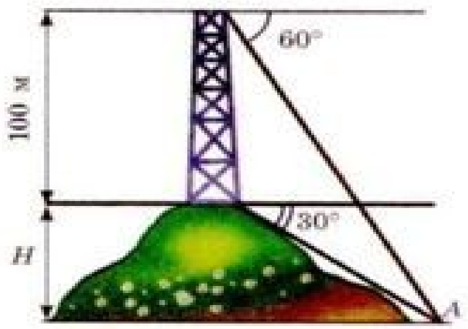
Тоді $BC = \sqrt{88^2 + 90^2 - 2 \cdot 88 \cdot 90 \cdot \cos 28°} \approx 43{,}1$ (м).

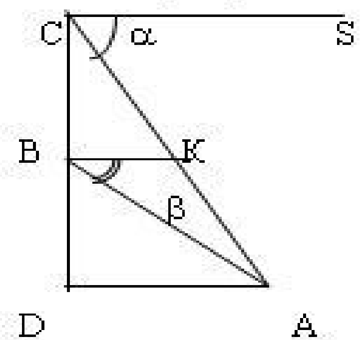


Мал. 3

4. ***Задачі на обчислення висоти предмета (гори) за відомим значенням його частини (спостережної вишки)***

Задача. Спостережна вишка заввишки 100 м розташована на горі (мал. 4). Об'єкт спостереження А видно з вершини вишки під кутом $\alpha=60^0$, а від основи вишки – під кутом $\beta=30^0$ до горизонту. Знайдіть висоту гори.





Мал. 4

Розв'язання.

Враховуючи, що BC= a=100м, $\angle SCK=\angle CAD=\alpha=60^0$, $\angle KBA=\angle BAD=\beta=30^0$, необхідно знайти значення висоти гори H=BD. Розглянемо ΔABC , у якому $\angle CBA= 90^0+\beta$, $\angle BAC=\alpha-\beta$. Застосуємо теорему синусів для цього трикутника :

$$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B} \text{ або } AC=\frac{BC*\sin B}{\sin A}=\frac{a*\sin(90^0+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{a*\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$$

Розглянемо ΔACD , у якому $\angle DAC=\alpha$, $\angle BDA=90^0$. Знайдемо значення катета CD відомим значенням гіпотенузи. Маємо $CD=AC*\sin A=\dfrac{a*\cos\beta*\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}$

Для заданих значень параметрів маємо

$$CD=\frac{100*\cos30^0*\sin60^0}{\sin(60^0-30^0)}=100*\frac{\sqrt{3}}{2}*\frac{\sqrt{3}}{2}:\frac{1}{2}=150(м)$$

Тоді H=BD=CD–BC=150м –100м = 50м

5. Задача на обчислення відстані між недоступними пунктами

Потрібно обчислити відстань між недоступними пунктами C і D (мал. 5). Для цього вибрали на місцевості дві точки A і B так, щоб можна було виміряти відстань AB і щоб з цих точок було видно точки C і D. Потім виміряли $AB = a$, $\angle CAD = \alpha_1$, $\angle BAD = \alpha_2$, $\angle ABC = \beta_2$, $\angle CBD = \beta_1$. Поясніть, як знайшли відстань CD. Обчисліть CD, якщо $a = 100$ м, $\alpha_1 = 30^\circ$, $\alpha_2 = 70^\circ$, $\beta_1 = 54^\circ$, $\beta_2 = 28^\circ$.

Мал. 5

Розв'язання.

Відомий (виміряний) відрізок AB входить у два трикутники ABC та ABD Шуканий відрізок CD входить у трикутники ACD та CBD. Для переходу між трикутниками можна використати сторони (відрізки) AC і AD або BD і BC

Розглянемо ΔABC, у якому $\angle CBA=\beta_2$, $\angle BAC=\alpha_1+\alpha_2$, $AB=a$. Тоді $\angle ACB=180^0-(\alpha_1+\alpha_2+\beta_2)$. Застосуємо теорему синусів для цього трикутника :

$$\frac{AB}{\sin C}=\frac{AC}{\sin B} \text{ або } AC=\frac{AB*\sin B}{\sin C}=\frac{a*\sin\beta_2}{\sin(180^0-(\alpha_1+\alpha_2+\beta_2))}=\frac{a*\sin\beta_2}{\sin(\alpha_1+\alpha_2+\beta_2)}$$

Для заданих параметрів маємо $AC=\dfrac{100*\sin 28^0}{\sin(30^0+70^0+28^0)}=\dfrac{100*0,469}{0,788}\approx 59,52(м)$

Розглянемо ΔABD, у якому $\angle BAD=\alpha_2$, $\angle ABD=\beta_1+\beta_2$, $AB=a$. . Тоді $\angle ADB=180^0-(\beta_1+\alpha_2+\beta_2)$.Застосуємо теорему синусів для цього трикутника :

$$\frac{AB}{\sin D}=\frac{AD}{\sin B} \text{ або } AD=\frac{AB*\sin B}{\sin D}=\frac{a*\sin(\beta_1+\beta_2)}{\sin(180^0-(\beta_1+\alpha_2+\beta_2))}=\frac{a*\sin(\beta_1+\beta_2)}{\sin(\beta_1+\alpha_2+\beta_2)}$$

Для заданих параметрів маємо

$$AD = \frac{100 * \sin(28^0 + 54^0)}{\sin(54^0 + 70^0 + 28^0)} = \frac{100 * \sin 82^0}{\sin 152^0} = \frac{100 * 0,990}{0,469} \approx 211,09 (м)$$

Розглянемо ΔACD , у якому $\angle CAD = \alpha_1$, сторони AC та AD обчислені при розгляді двох попередніх трикутників. Застосуємо теорему косинусів для цього трикутника :

$CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2 * AC * AD * \cos A = 59,52^2 + 211,09^2 - 2 * 59,52 * 211,09 * \cos 30^0 \approx$

$\approx 3542,6304 + 44558,9881 - 25128,1536 * 0,866 \approx 48101,6185 - 21760,9810 =$

$= 26340,6375; \quad CD = \sqrt{26340,6375} \approx 162,3$ (м)

Відповідь. 162,3 м