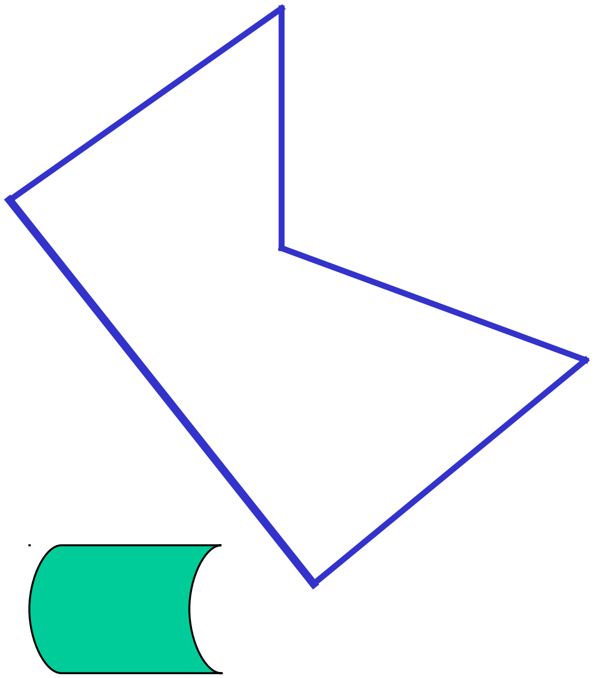
# Геометричні перетворення

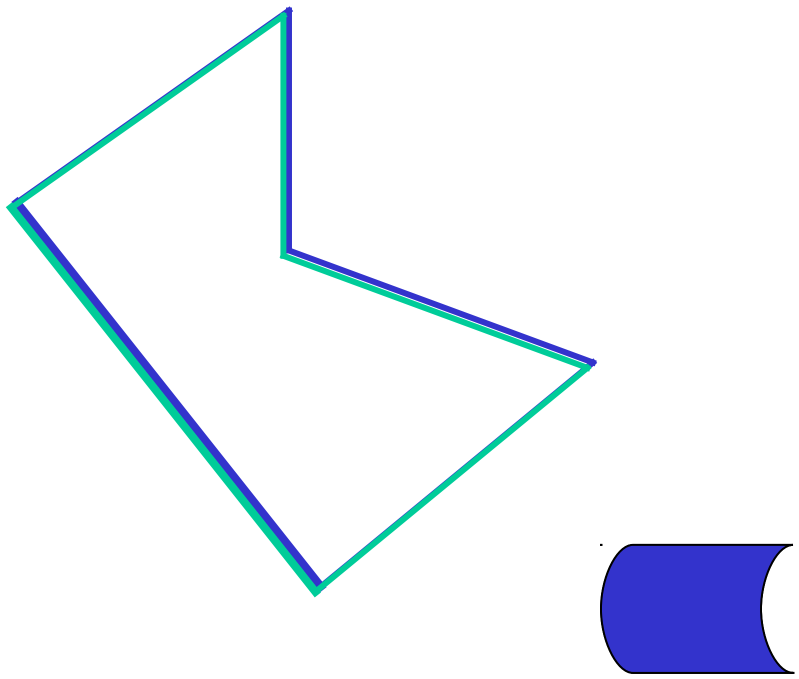
***Геометрія є прообразом краси світу (Й.Кеплер)***

***Переміщенням*** (або ***рухом***) називається перетворення фігури, внаслідок якого зберігаються відстані між точками даної фігури.

***Властивості переміщення***:

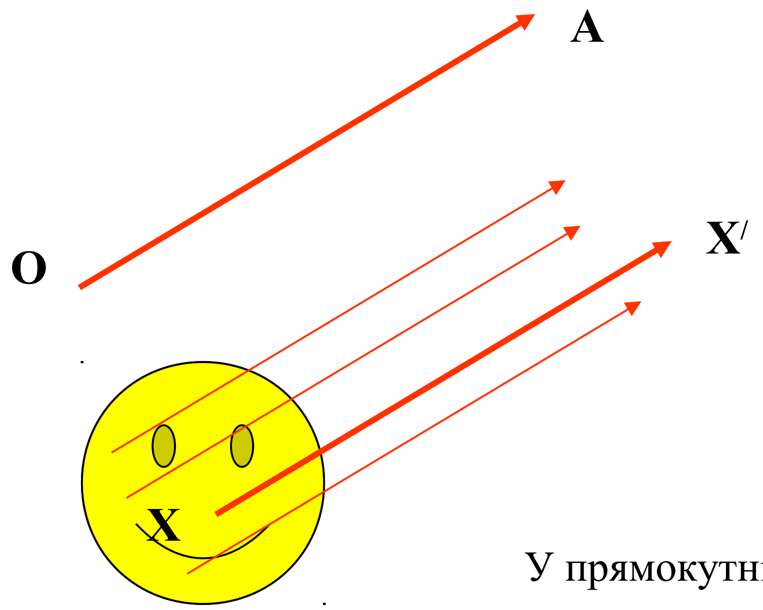
- ✓два послідовні переміщення знову дають переміщення;
- ✓перетворення, обернене до переміщення також є переміщення;
- ✓внаслідок переміщення точки, що лежать на прямій, переходять у точки, що лежать на прямій, і порядок їх взаємного розміщення зберігається;
- ✓при переміщенні прямі переходять у прямі, промені – в промені, відрізки – у відрізки;
- ✓внаслідок переміщення зберігаються кути між променями.





Дві фігури називаються ***рівними***, якщо вони суміщаються переміщенням

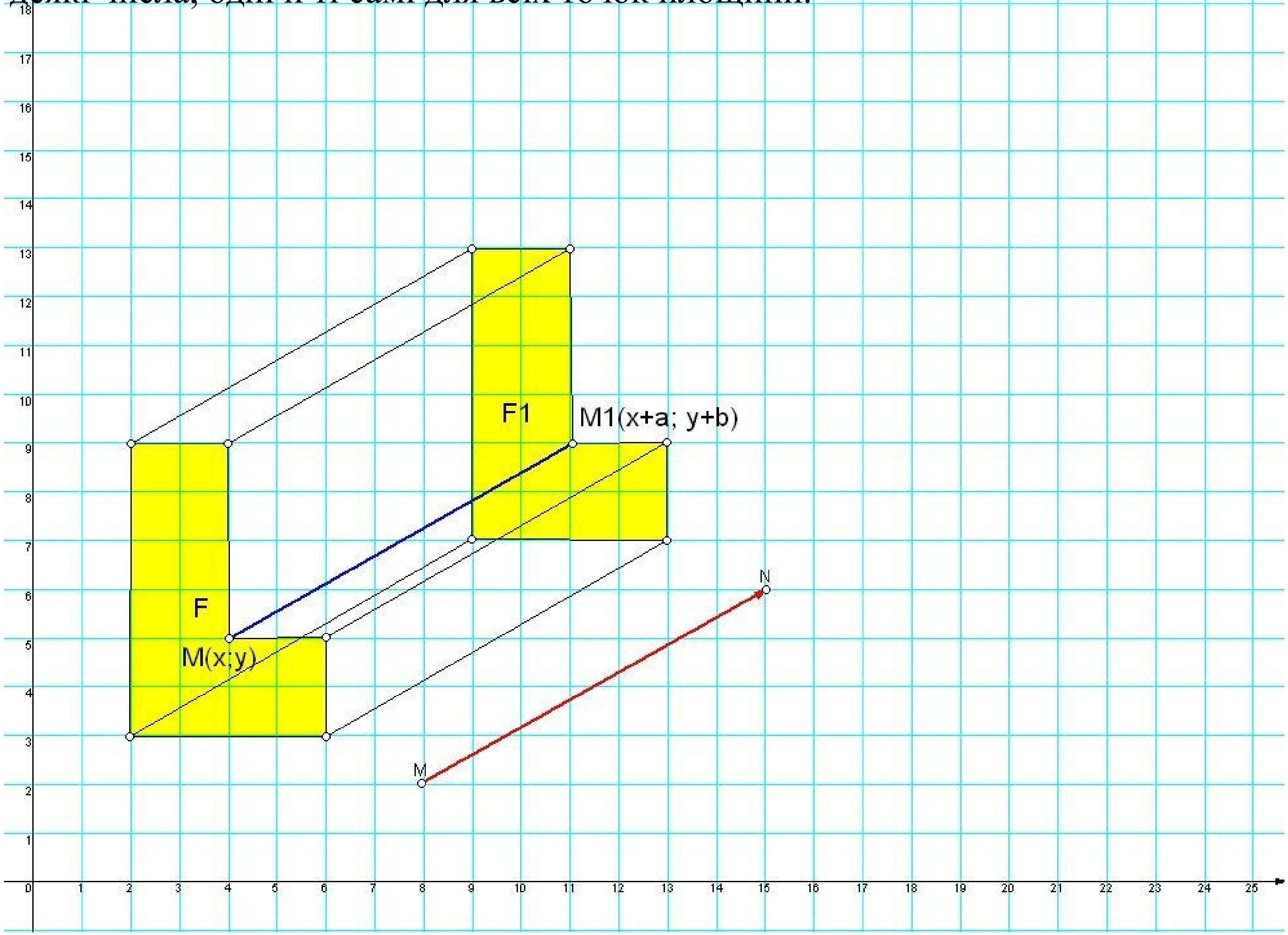
***Паралельним перенесенням*** фігури F у напрямі променя OA на відстань a називається таке перетворення фігури F у фігуру $F'$, внаслідок якого кожна точка X фігури F переходить у точку $X'$ фігури $F'$ так, що промені $XX'$ і OA співнапрямлені і $XX' = a$




У прямокутній системі координат ***паралельне перенесення***, яке переводить точку (x;y) в точку $(x_1; y_1)$, задається формулами $x_1=x+a$; $y_1=y+b$,
де a і b – деякі числа, одні й ті самі для всіх точок площини.

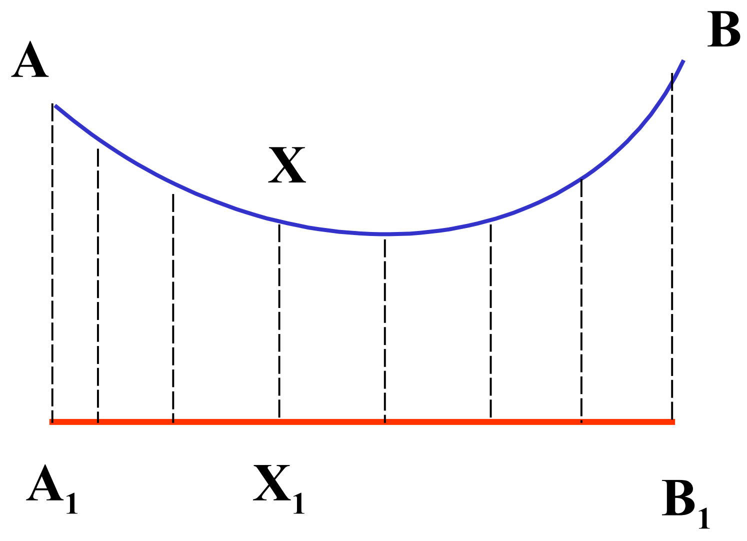
***Основна властивість паралельного перенесення: паралельне перенесення є переміщенням***

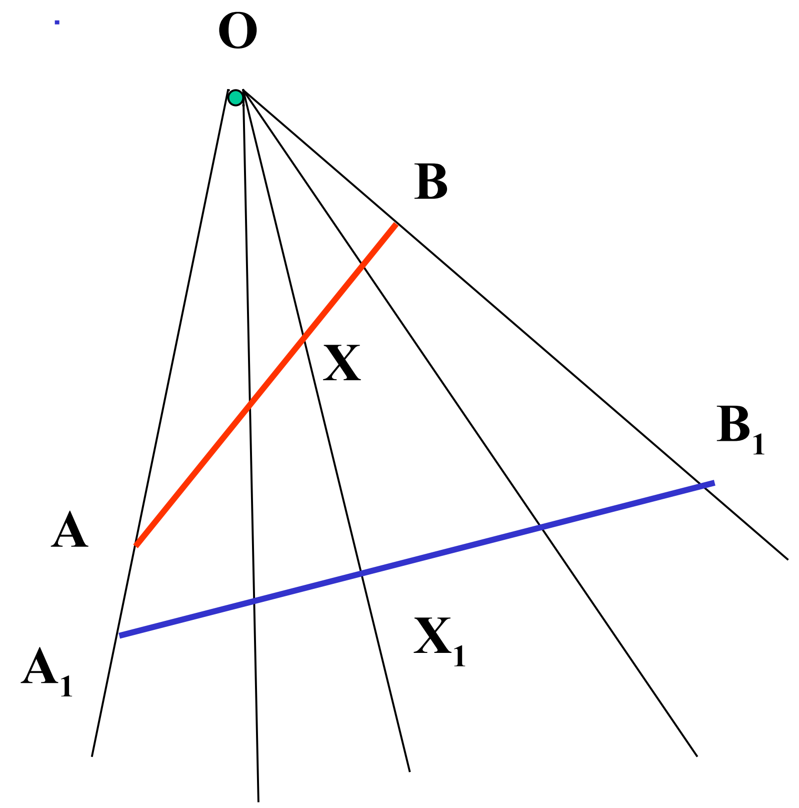
У прямокутній системі координат ***паралельне перенесення***, яке переводить точку (x;y) в точку ($x_1$; $y_1$), задається формулами $x_1=x+a$; $y_1=y+b$,
де a і b – деякі числа, одні й ті самі для всіх точок площини.

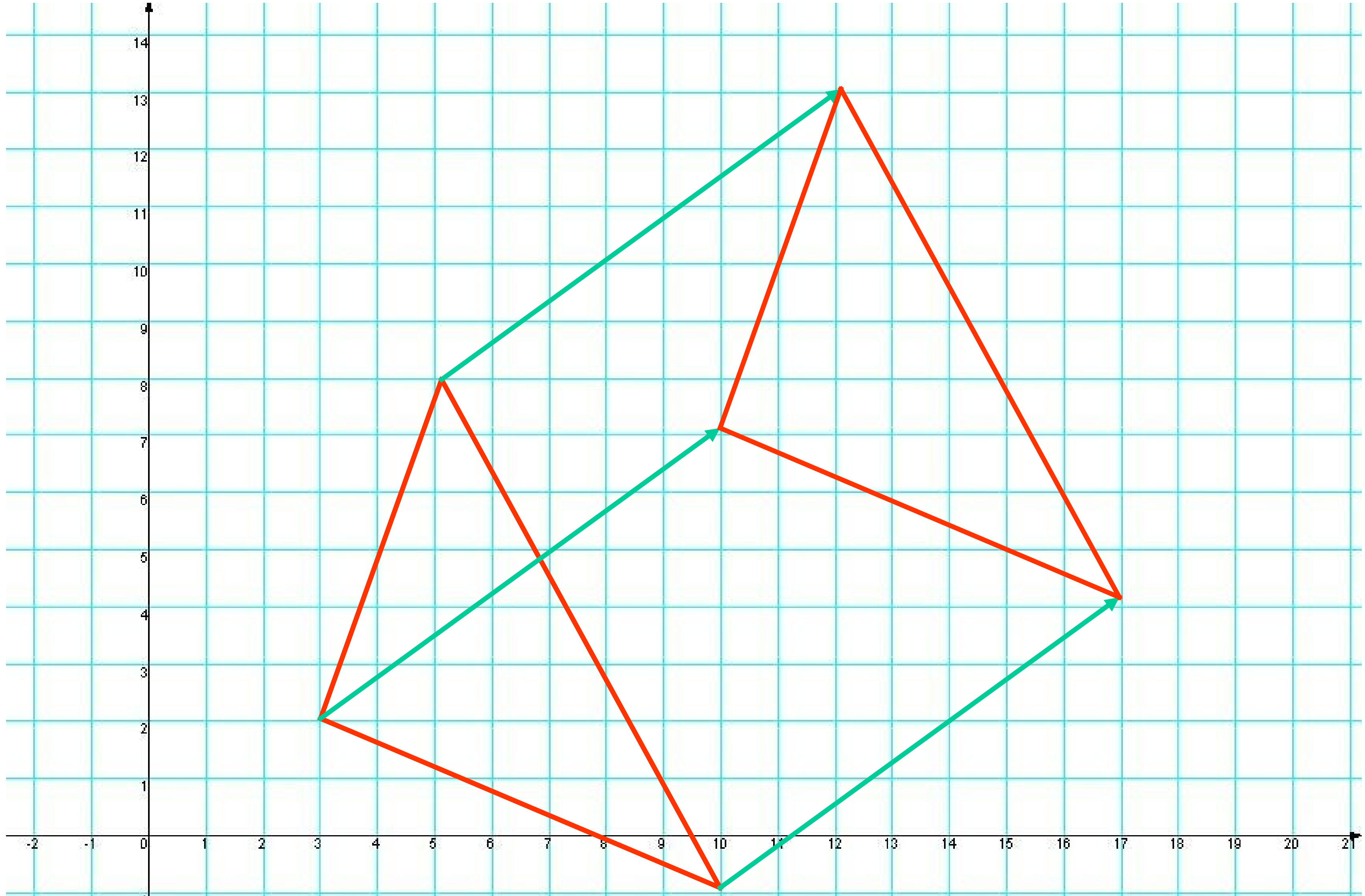



***Основна властивість паралельного перенесення: паралельне перенесення є переміщенням***

***Перетворенням*** фігури F у фігуру $F^/$ називається така відповідність, при якій:
1) кожній точці фігури F відповідає єдина точка фігури $F^/$;
2)кожній точці фігури $F^/$ відповідає деяка точка фігури F;
3) різним точкам фігури F відповідають різні точки фігури $F^/$.
Фігура $F^/$ називається образом фігури F для даного перетворення.



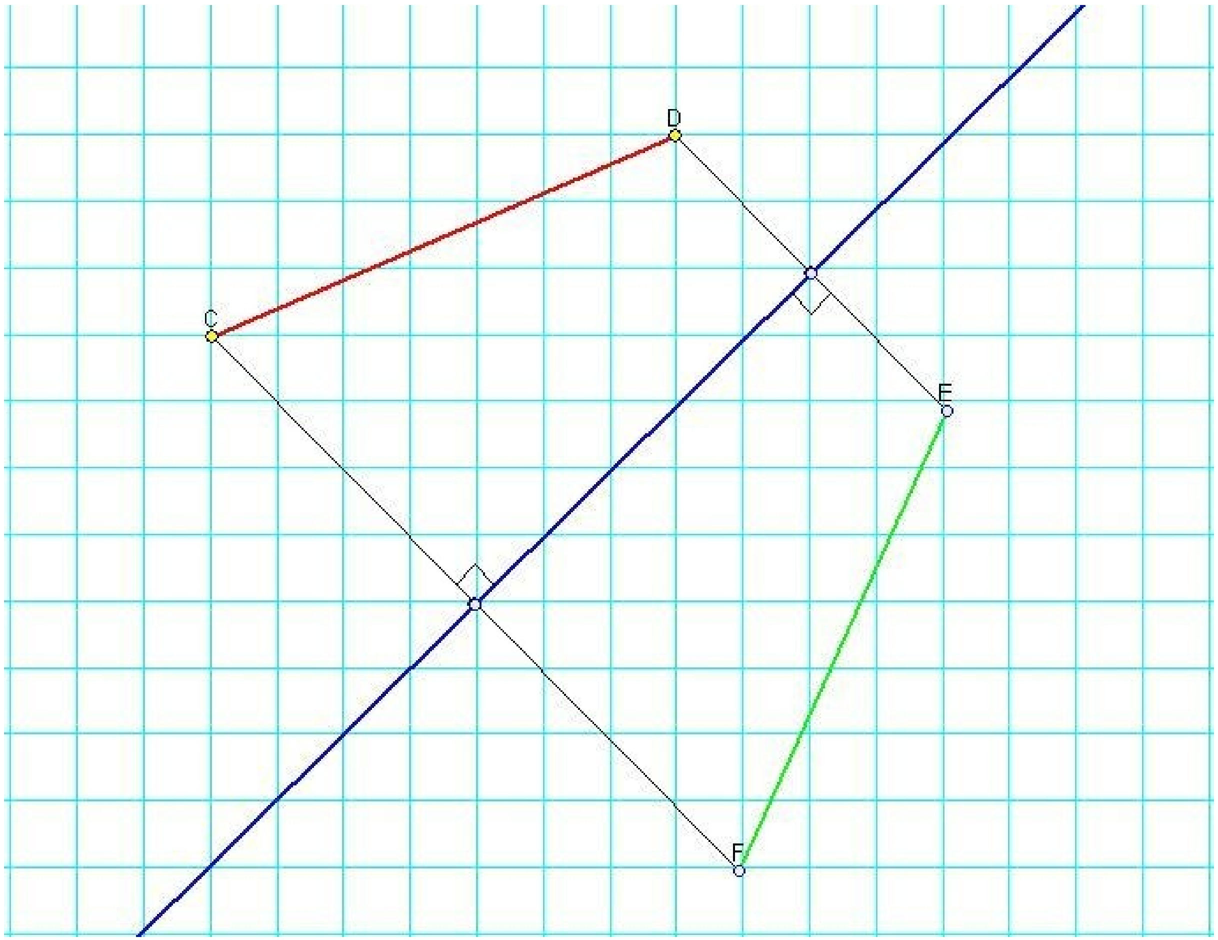





***При паралельному перенесенні*** пряма переходить у паралельну пряму (або в себе); промінь переходить у співнапрямлений промінь.

***При паралельному перенесенні*** точки переміщуються вздовж паралельних прямих (або однієї прямої) на ту саму відстань

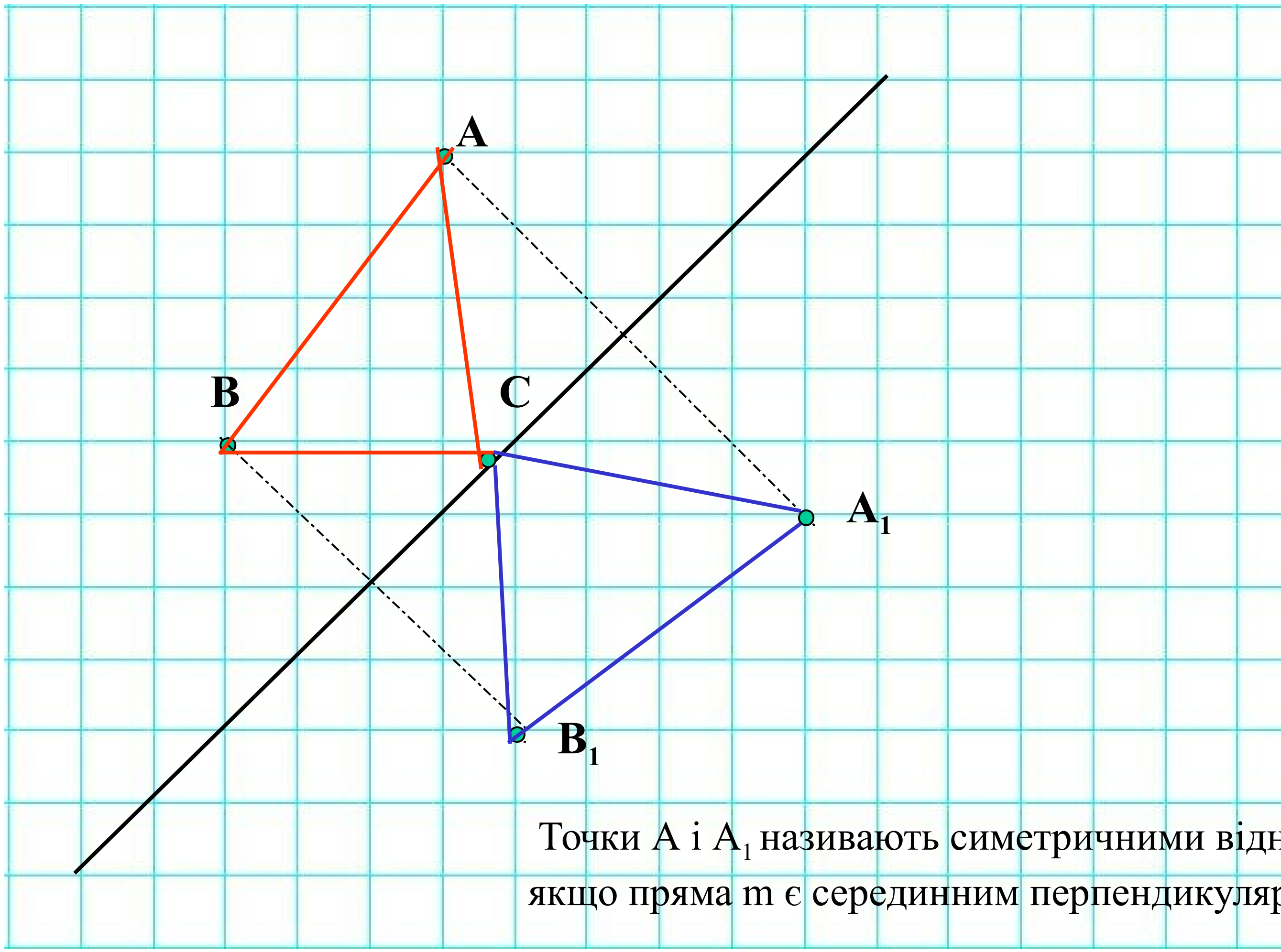
***Перетворенням симетрії*** (***осьовою симетрією***) відносно прямої m називаєть таке перетворення фігури F у фігуру $F_1$ , внаслідок якого кожна точка X фігури F переходить у точку $X_1$фігури $F_1$ , симетричну X відносно прямої m.




***Основна властивість осьової симетрії:***
***Осьова симетрія є переміщенням***

***Осьова симетрія*** перетворює пряму на пряму; відрізок  - на відрізок; многокутник на рівний йому многокутник.

Точки, що належать осі симетрії, відображаються самі на себе.

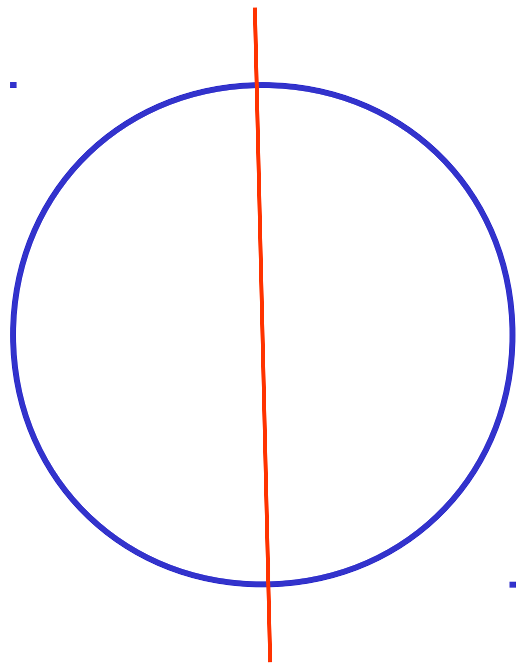


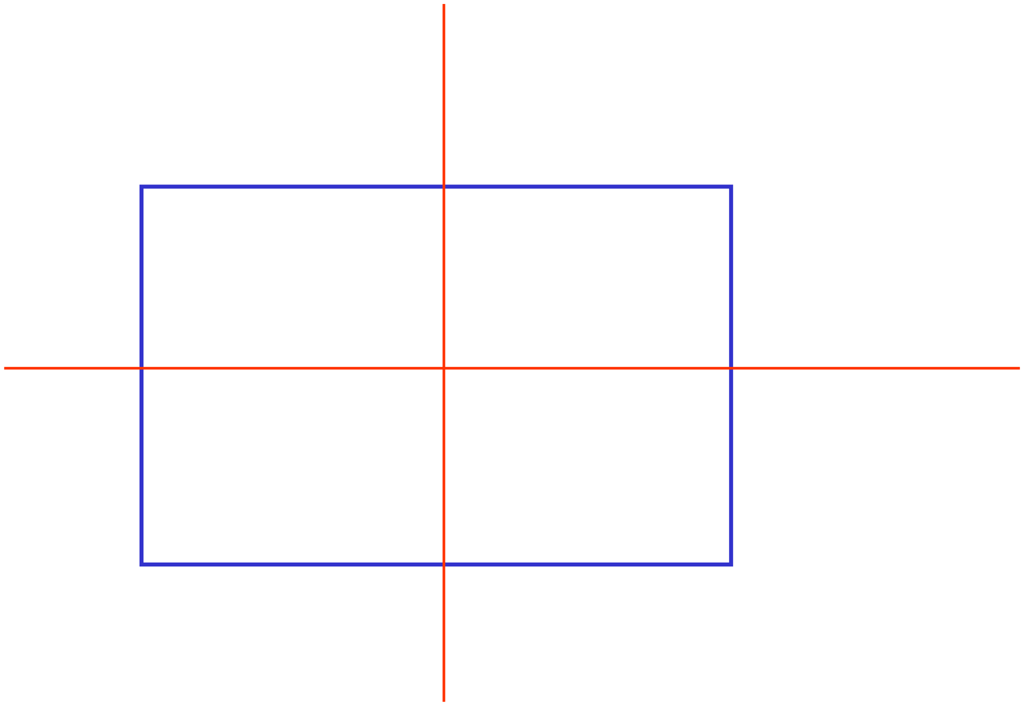

Точки A і $A_1$ називають симетричними відносно прямої m, якщо пряма m є серединним перпендикуляром відрізка AA1.

***Основна властивість осьової симетрії:***

***Осьова симетрія є переміщенням***

Якщо перетворення симетрії відносно прямої m переводить фігуру F у себе, то така фігура називається симетричною відносно прямої m, а сама пряма m – віссю симетрії фігури F.

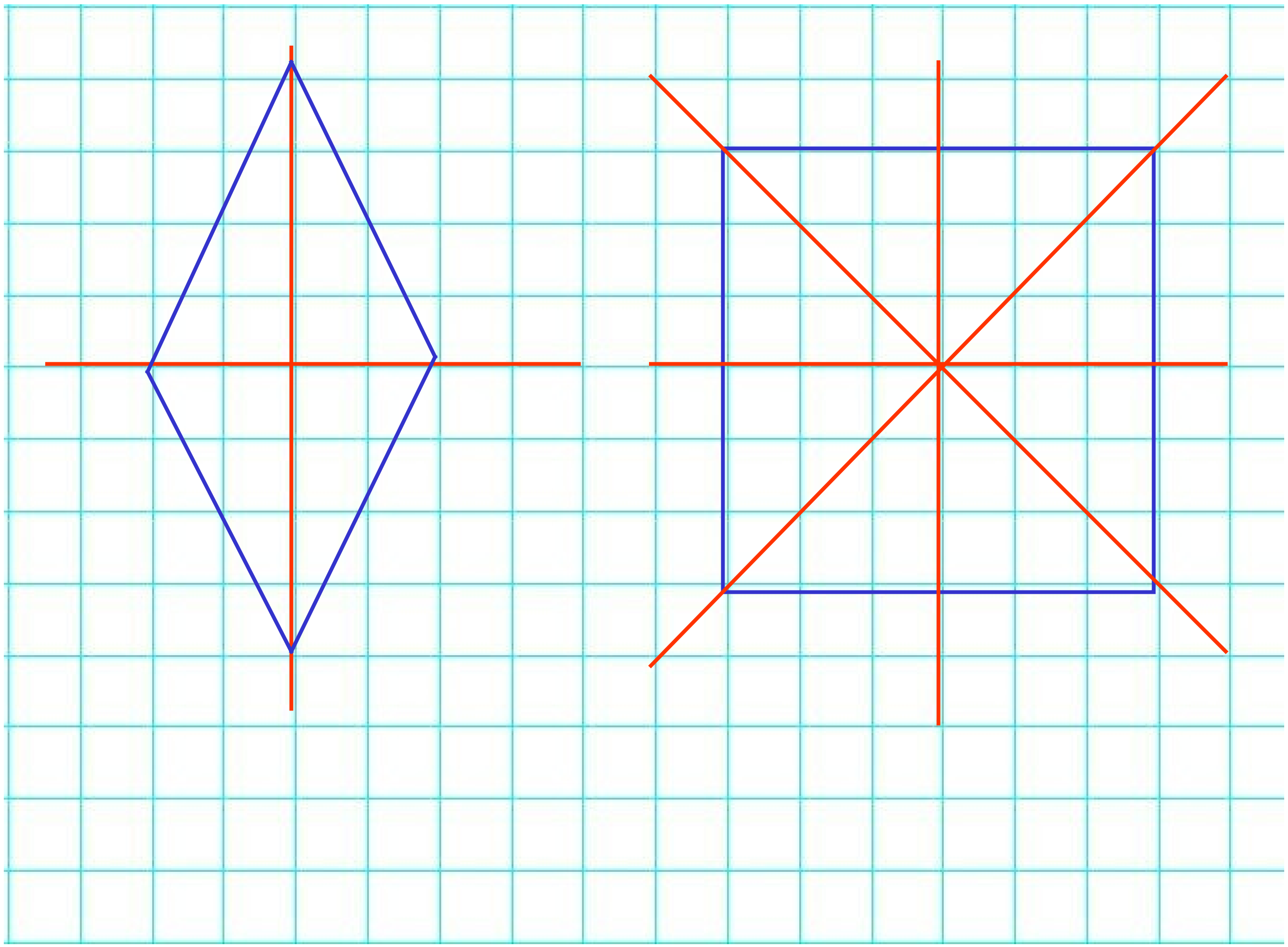




Скільки осей симетрії має коло?

Скільки осей симетрії має прямокутник?

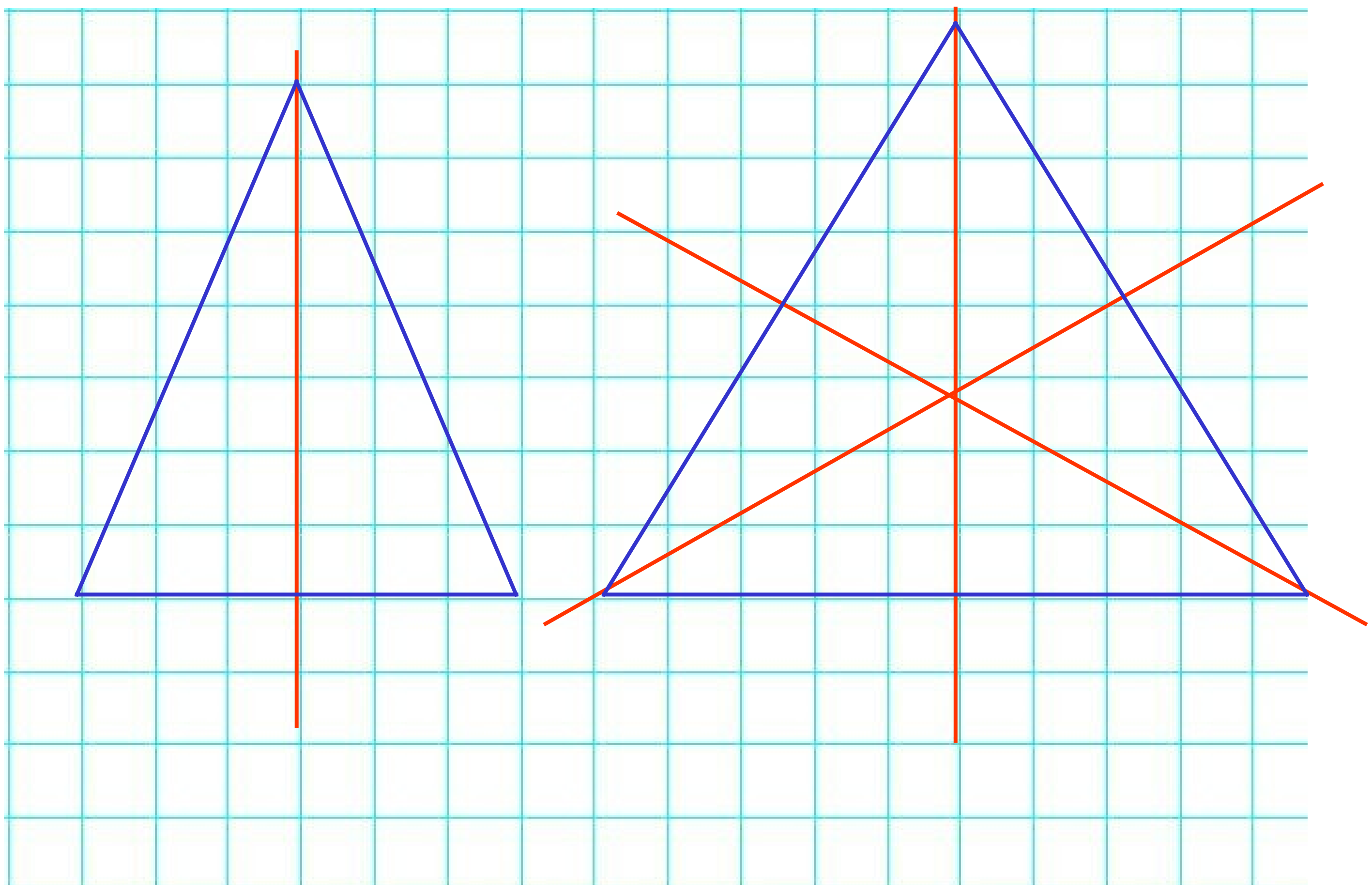
Якщо перетворення симетрії відносно прямої m переводить фігуру F у себе, то така фігура називається симетричною відносно прямої m, а сама пряма m – віссю симетрії фігури F.



Скільки осей симетрії має ромб?

Скільки осей симетрії має квадрат?

Якщо перетворення симетрії відносно прямої m переводить фігуру F у себе, то така фігура називається симетричною відносно прямої m, а сама пряма m – віссю симетрії фігури F.

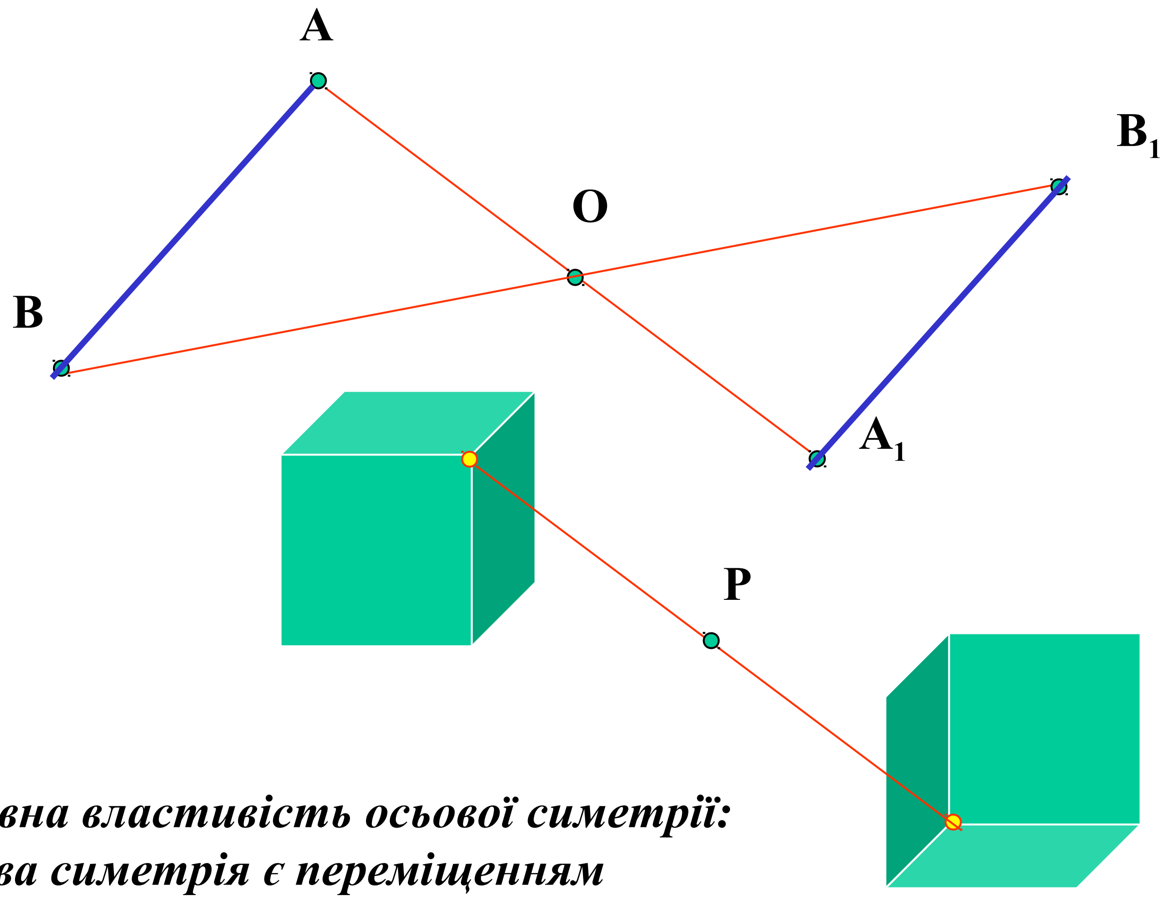


Скільки осей симетрії має рівнобедрений трикутник?

Скільки осей симетрії має рівносторонній трикутник?

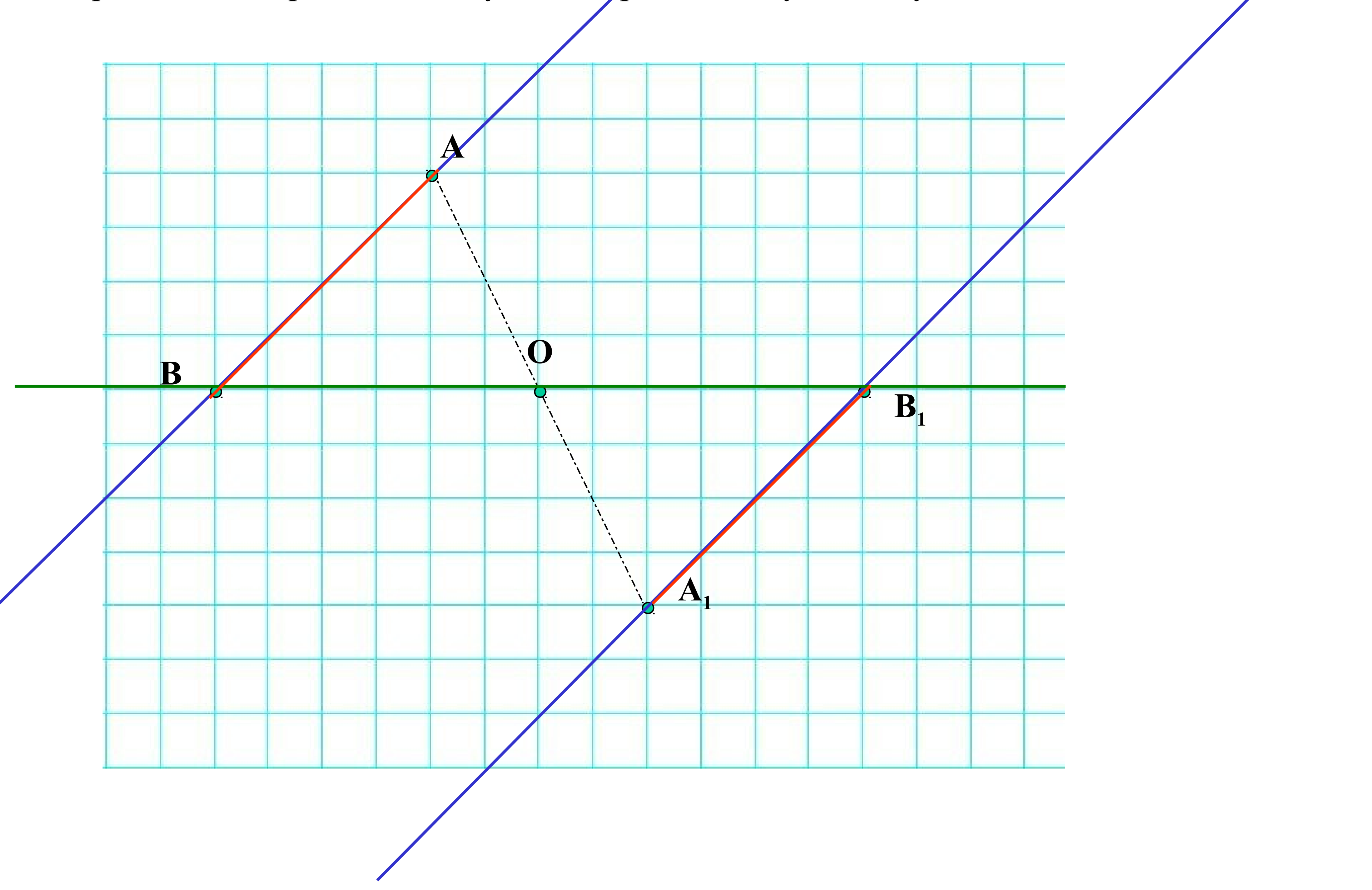
Точки A і $A_1$ називають ***симетричними відносно точки O***, якщо точка O є серединою відрізка $AA_1$.

***Перетворенням симетрії*** (***центральною симетрією***) відносно точки O називається таке перетворення фігури F у фігуру $F_1$, внаслідок якого кожна точка X фігури F переходить у точку $X_1$ фігури $F_1$, симетричну X відносно точки O.



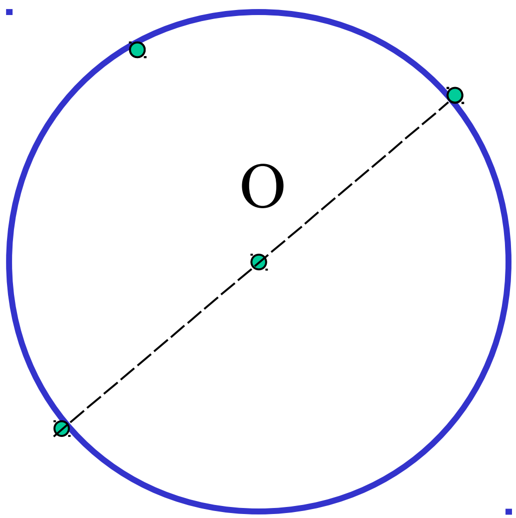

***Основна властивість осьової симетрії:***
***Осьова симетрія є переміщенням***

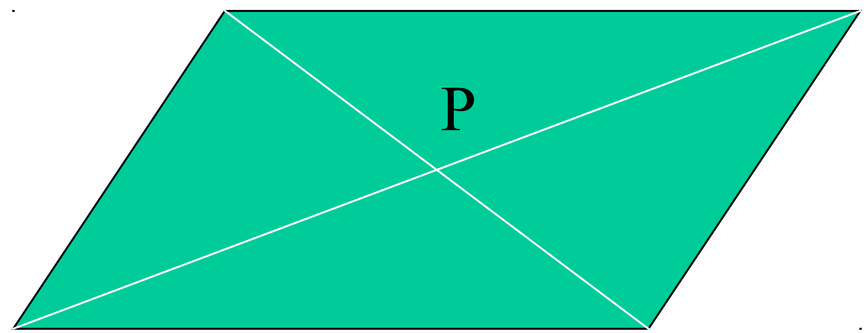
***Центральна симетрія*** перетворює пряму на паралельну їй пряму або в ту ж саму пряму; відрізок - на відрізок; многокутник на рівний йому многокутник.



Фігуру називають ***симетричною відносно точки*** О, якщо для кожної точки даної фігури точка, симетрична їй відносно точки О, також належить цій фігурі.

Якщо перетворення симетрії відносно точки О переводить фігуру F у себе, то така фігура називається ***центрально-симетричною***, а точка О – центром симетрії фігури F.



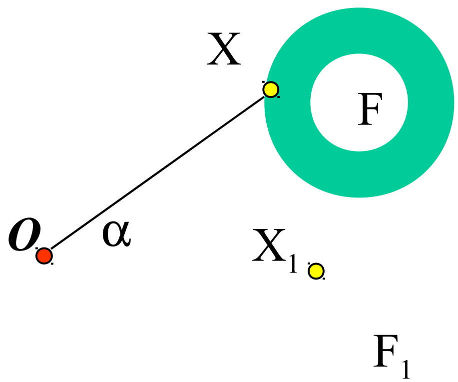




Центр кола є його центром симетрії

Точка перетину діагоналей паралелограма є його центром симетрії

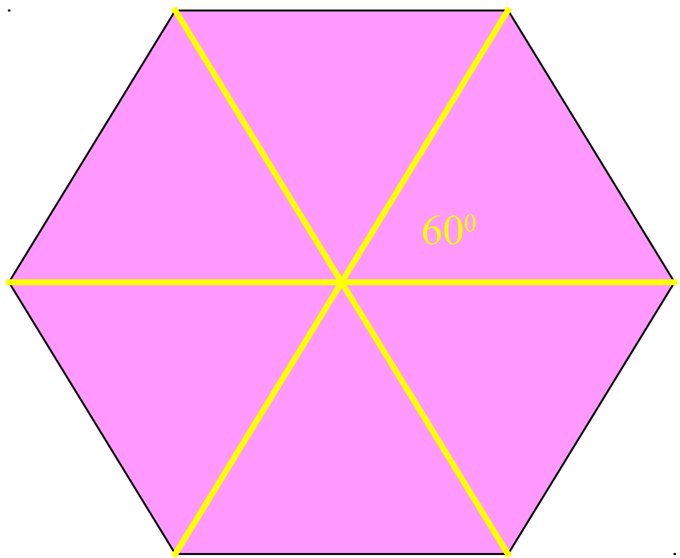
***Поворотом*** фігури F ***навколо точки O на кут α*** називається перетворення фігури F у фігуру $F_1$ , внаслідок якого кожна точка X фігури F переходить у точку $X_1$фігури $F_1$ так, що $OX_1 = OX$ і $\angle XOX_1 = \alpha$.

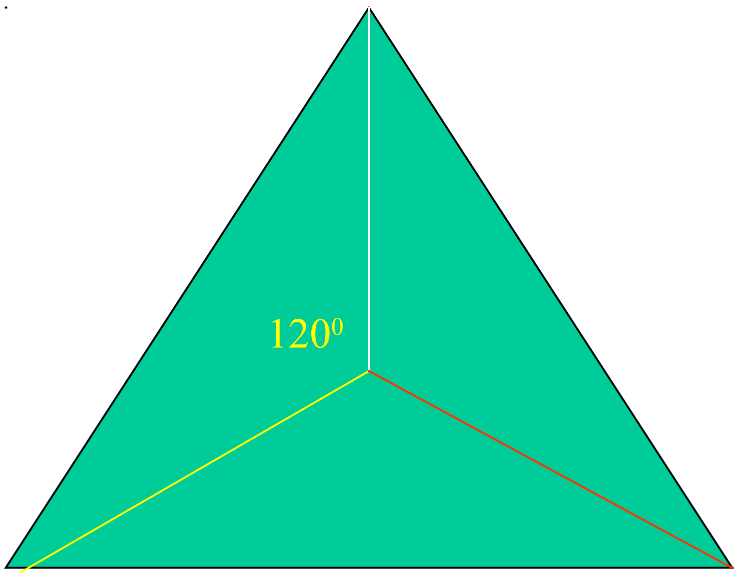
Точку O називають центром повороту, а кут α – кутом повороту.




***Основна властивість повороту: поворот є переміщенням.***
***Тобто якщо фігура $F_1$ – образ фігури F при повороті, то $F = F_1$***

Якщо внаслідок повороту навколо деякої точки O фігура F переходить у себе, то кажуть, що ця фігура має ***поворотну симетрію*** (або ***симетрію обертання***).

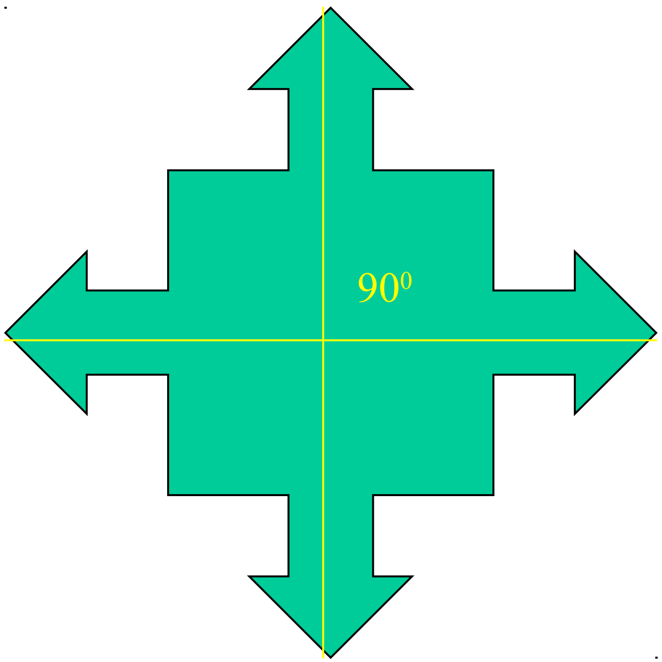


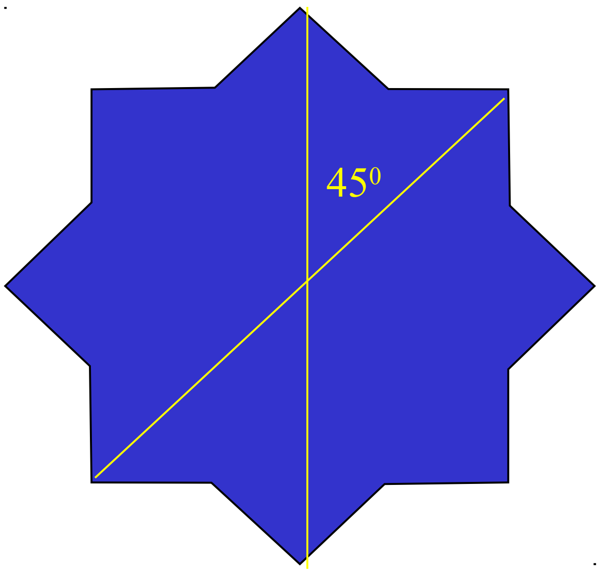




Правильний шестикутник переходить у себе при поворотах на кути кратні $60^0$

Правильний трикутник переходить у себе при поворотах на кути кратні $120^0$

Якщо внаслідок повороту навколо деякої точки O фігура F переходить у себе, то кажуть, що ця фігура має ***поворотну симетрію*** (або ***симетрію обертання***).



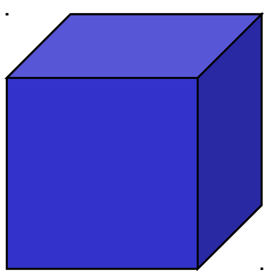



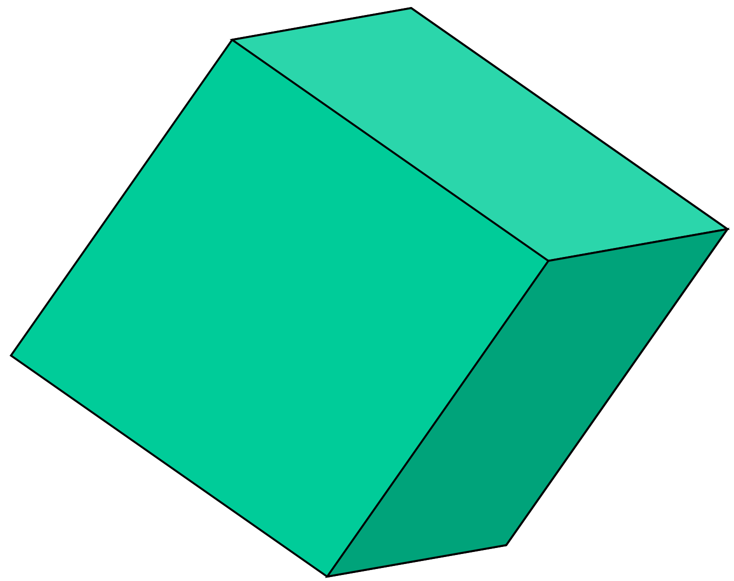

Фігура, що має дві осі симетрії, переходить у себе при поворотах на кути кратні $90^0$

Фігура переходить сама в себе при поворотах на кути кратні $45^0$

***Перетворенням подібності (подібністю)*** називається таке перетворення фігури ***F*** у фігуру $\boldsymbol{F_1}$**,** внаслідок якого відстані між точками змінюються в тому самому відношенні k (k>0). Число k>0 називають ***коефіцієнтом подібності.***

Дві фігури називаються ***подібними,*** якщо вони переводяться одна в одну перетворенням подібності.

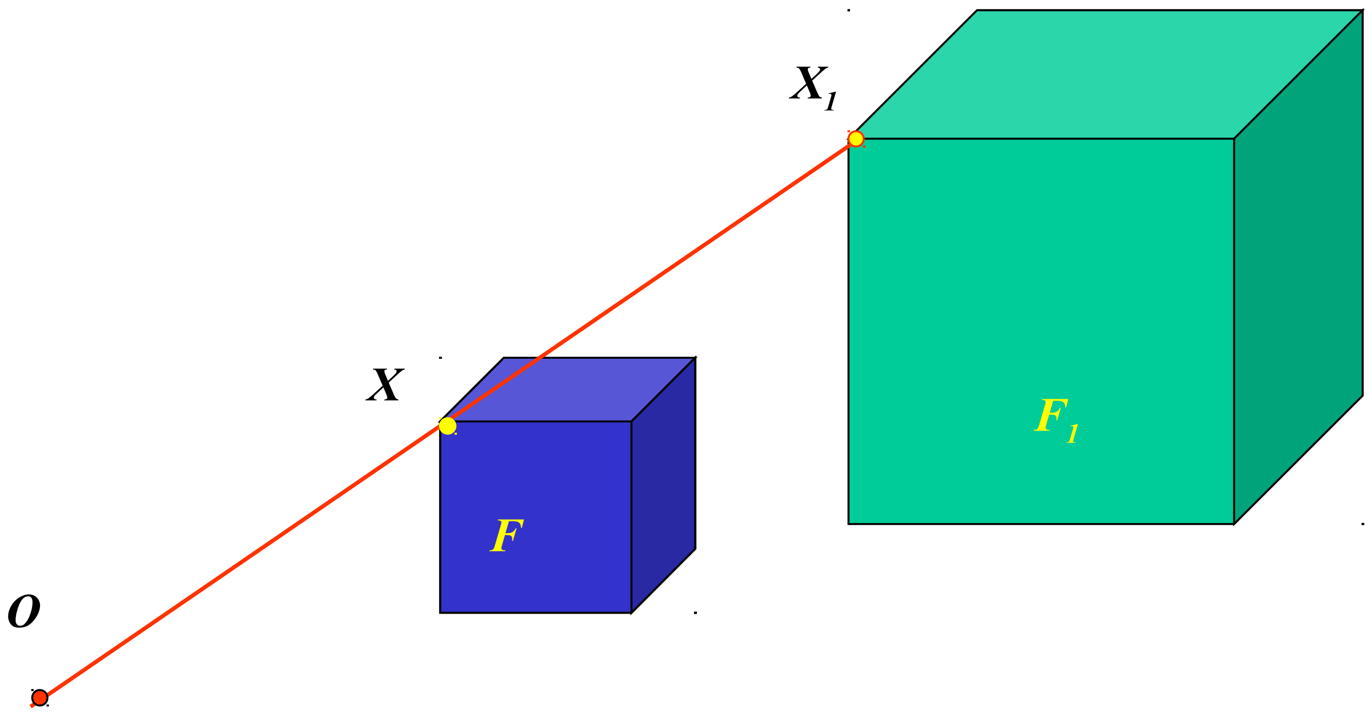




***Гомотетією з центром О*** називається таке перетворення фігури ***F*** у фігуру $F_1$, внаслідок якого кожна точка X фігури F переходить у точку $X_1$ фігури $F_1$ так, що точка $X_1$ лежить на промені OX і $OX_1=kOX$ ( k – фіксоване додатне число).

Відстані між точками змінюються в тому самому відношенні k (k>0).

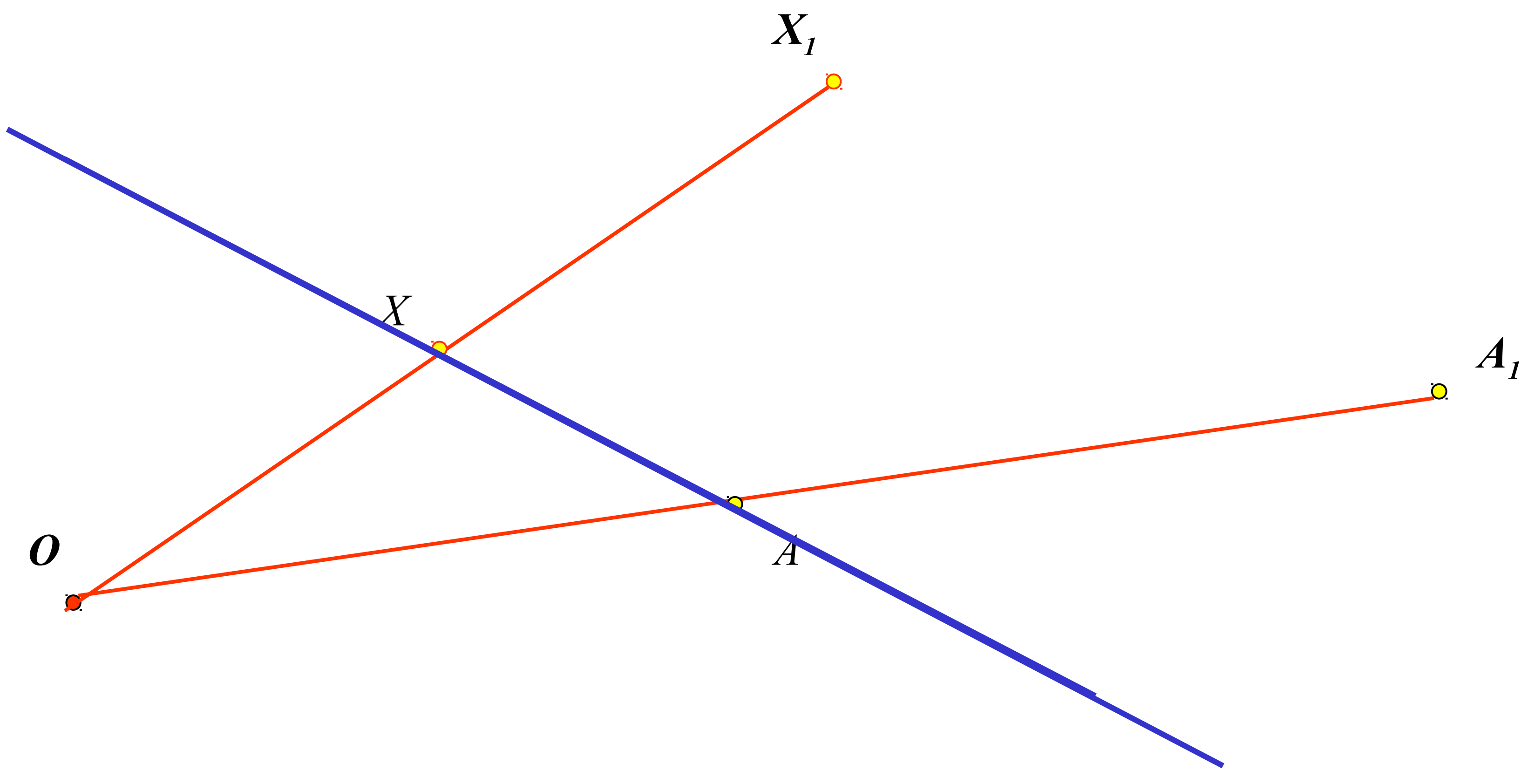
Число k>0 називають ***коефіцієнтом гомотетії,*** а самі фігури F і $F_1$– гомотетичними




***Основна властивість гомотетії: гомотетія є перетворенням подібності.***

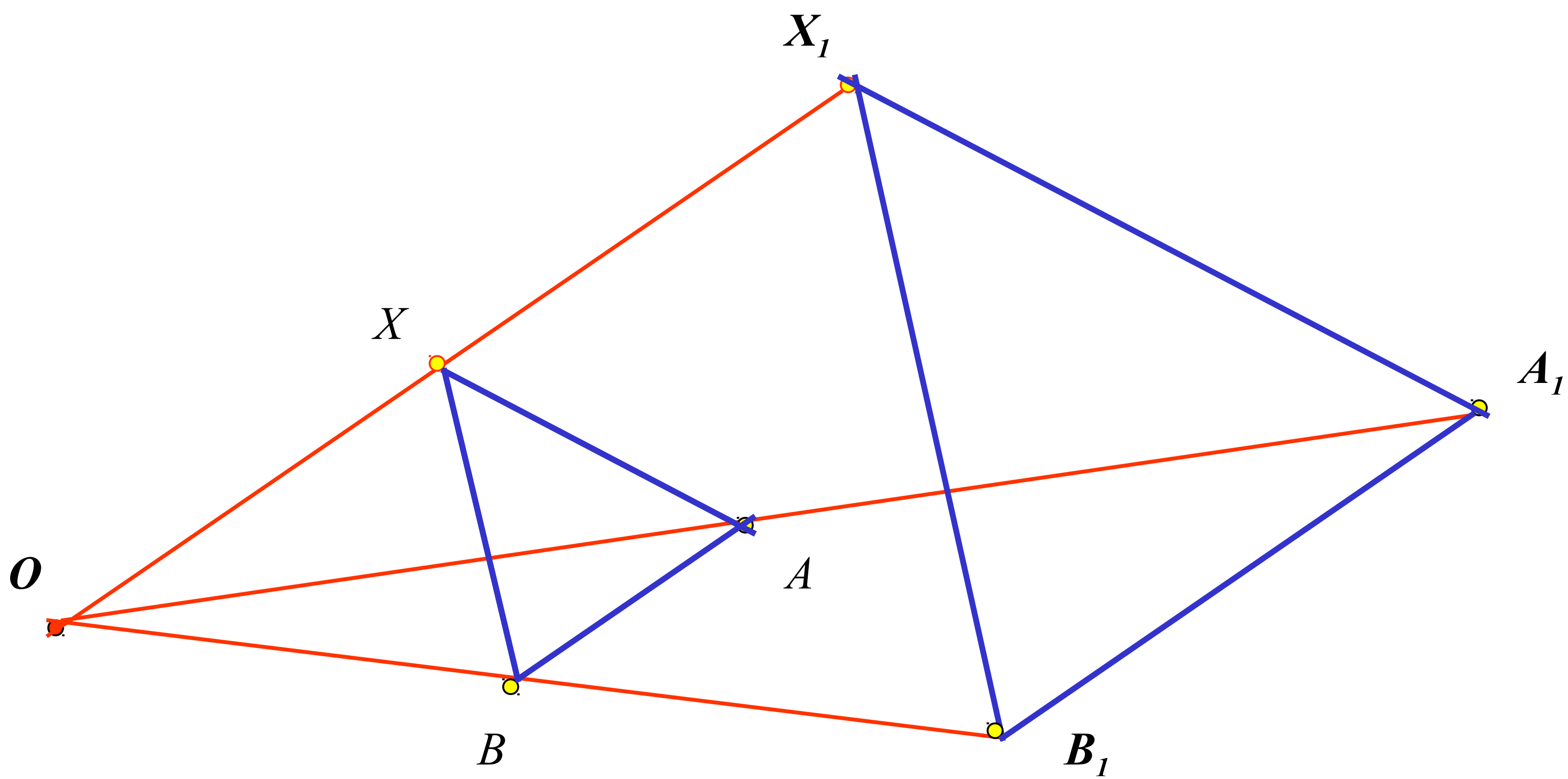
***При гомотетії:***

- образом прямої є пряма;
- образом відрізка є відрізок;

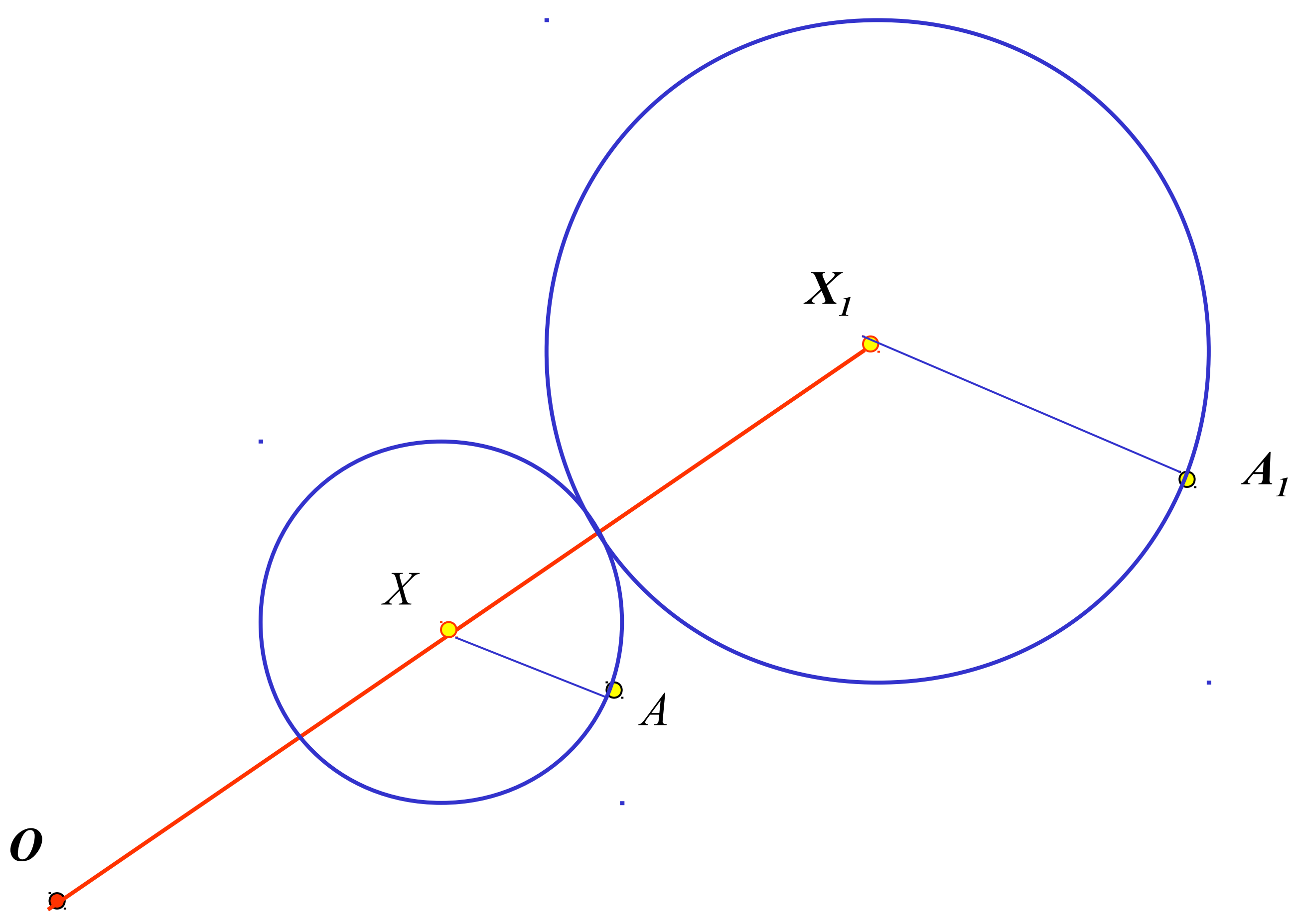


***При гомотетії:***

- образом кута є кут, який дорівнює даному;
- образом трикутника є трикутник, подібний даному;
- площа многокутника змінюється в $k^2$ разів, де k – коефіцієнт гомотетії**.**



***При гомотетії*** образом кола є коло



***Дві фігури називаються подібними, якщо одну з них можна отримати з іншої в результаті композиції двох перетворень: гомотетії і руху***

Гомотетія – окремий випадок перетворення подібності

***Подібність = гомотетія + рух***