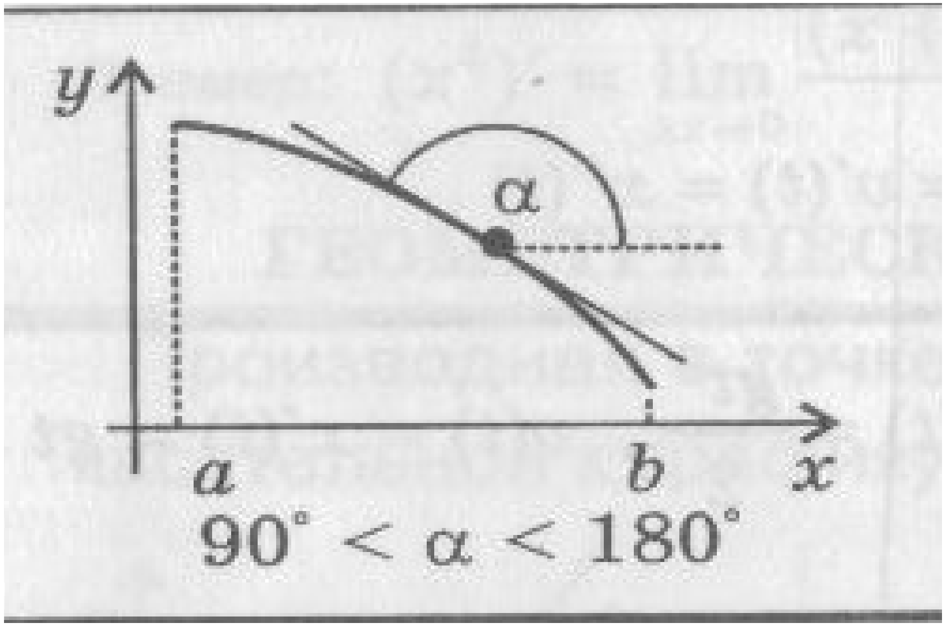
Застосування похідної

- ***Зростання та спадання функції.***
- ***Екстремальні точки. Локальний екстремум функції.***
- ***Найбільше і найменше значення функції на проміжку***
- ***Загальна схема дослідження функції для побудови графіків.***

Монотонність функції



***Достатня умова спадання функції*.**

Якщо у кожній точці проміжку (а;в) f'(x)<0, тоді функція монотонно спадає на цьому проміжку

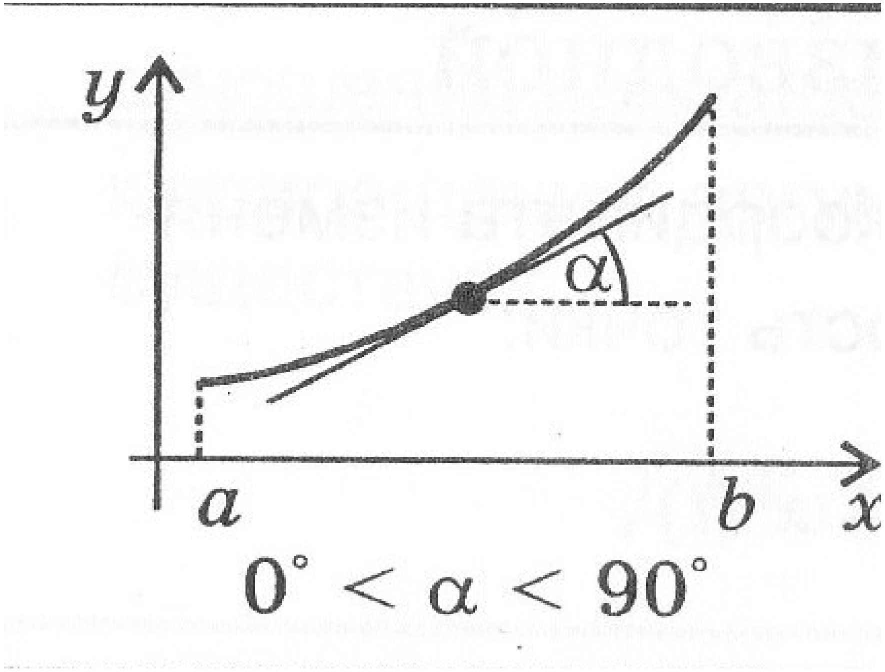
Монотонність функції

Достатня умова зростання функції.

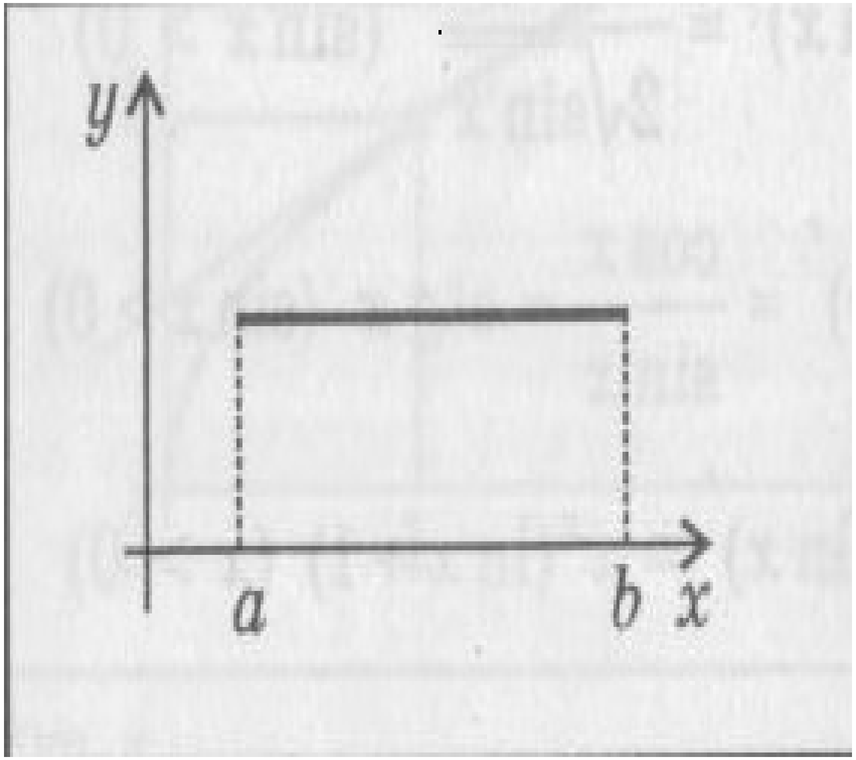
Якщо у кожній точці проміжку (а;в)

f’(x)<0, тоді функція монотонно

зростає на цьому проміжку



Необхідна та достатня умова сталості функції

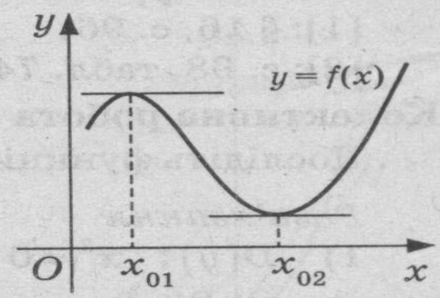


Якщо в кожній точці деякого інтервалу (а,в) виконується рівність f'(x)=0, то функція у= f(x) є сталою на цьому проміжку

Екстремуми функцій

Необхідна умова екстремуму функції

Теорема Ферма. Якщо x_0 — точка екстремуму диференційованої функції $y = f(x)$, то $f'(x_0) = 0$.



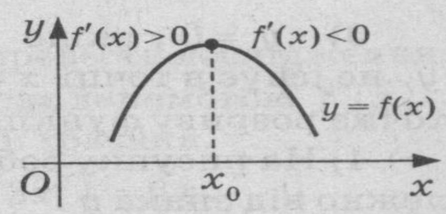
$f'(x_{01}) = 0$; $f'(x_{02}) = 0$, бо дотична у цих точках паралельна осі Ox (див. рисунок).

Якщо $f(x) = x^3$, то $f'(x) = 3x^2$, $f'(x) \geqslant 0$ для $x \in \mathbf{R}$, але в точці $x_0 = 0$ $f'(x) = 0$. Отже, функція зростаюча.

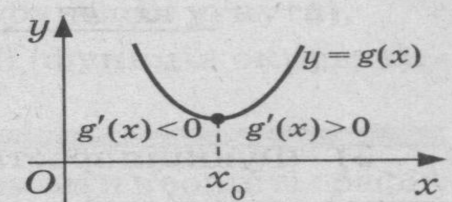
Отже, стаціонарні та критичні точки можуть бути тільки точками, які «підозрюються» в тому, щоб називатися точками екстремуму, або точками, «підозрюваними» на екстремум.

Достатня умова екстремуму функції

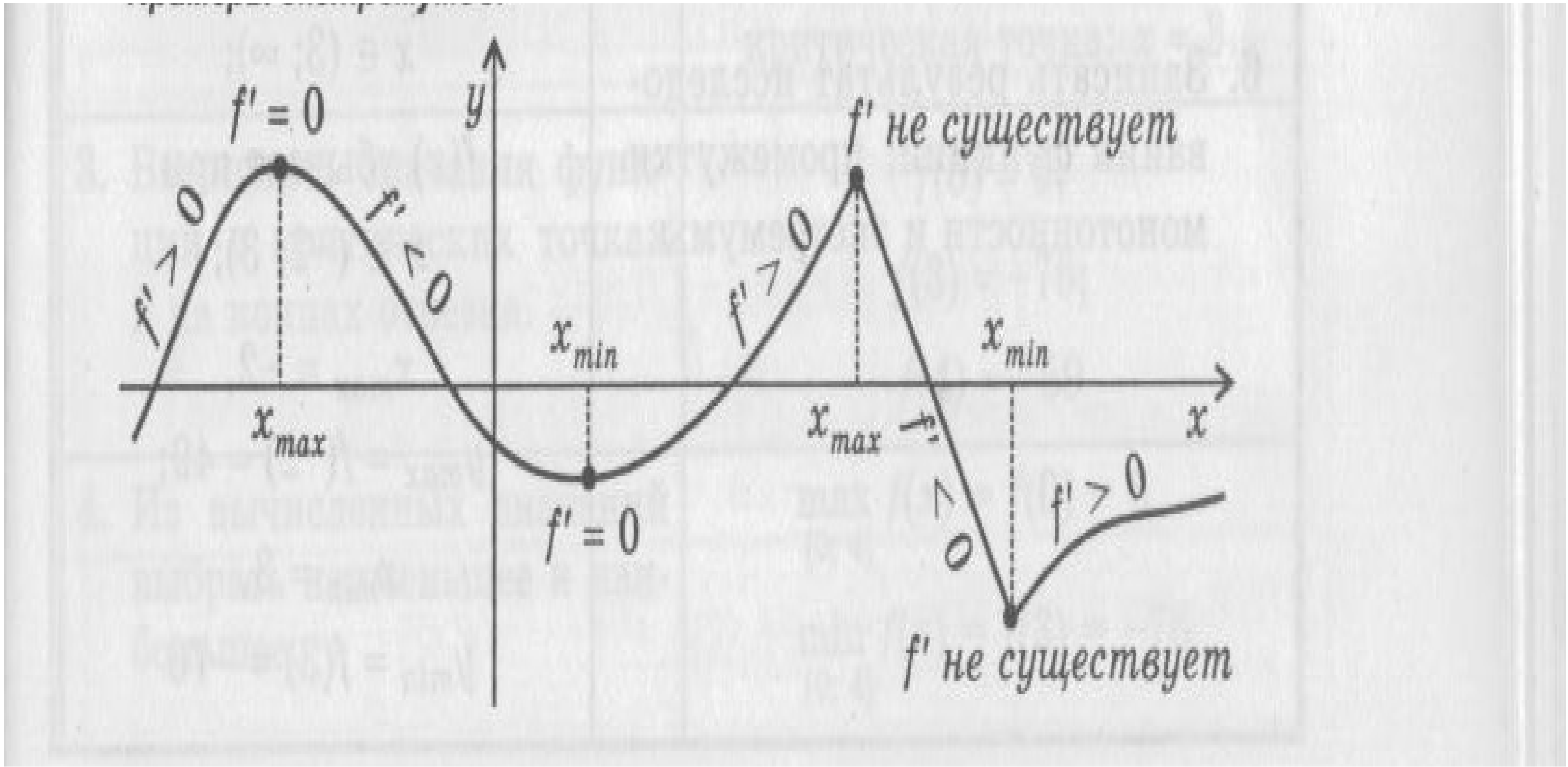
На рисунку зображена точка максимуму функції $f(x)$. $x_{\max} = x_0$, бо $f'(x)$ міняє знак при переході через стаціонарну точку x_0 зліва направо з «+» на «−».



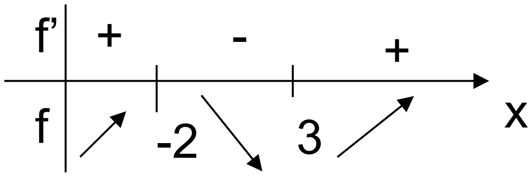
На рисунку зображена точка мінімуму функції $g(x)$. $x_{\min} = x_0$, бо $g'(x)$ міняє знак при переході через стаціонарну точку x_0 зліва направо з «−» на «+».



Приклади екстремумів

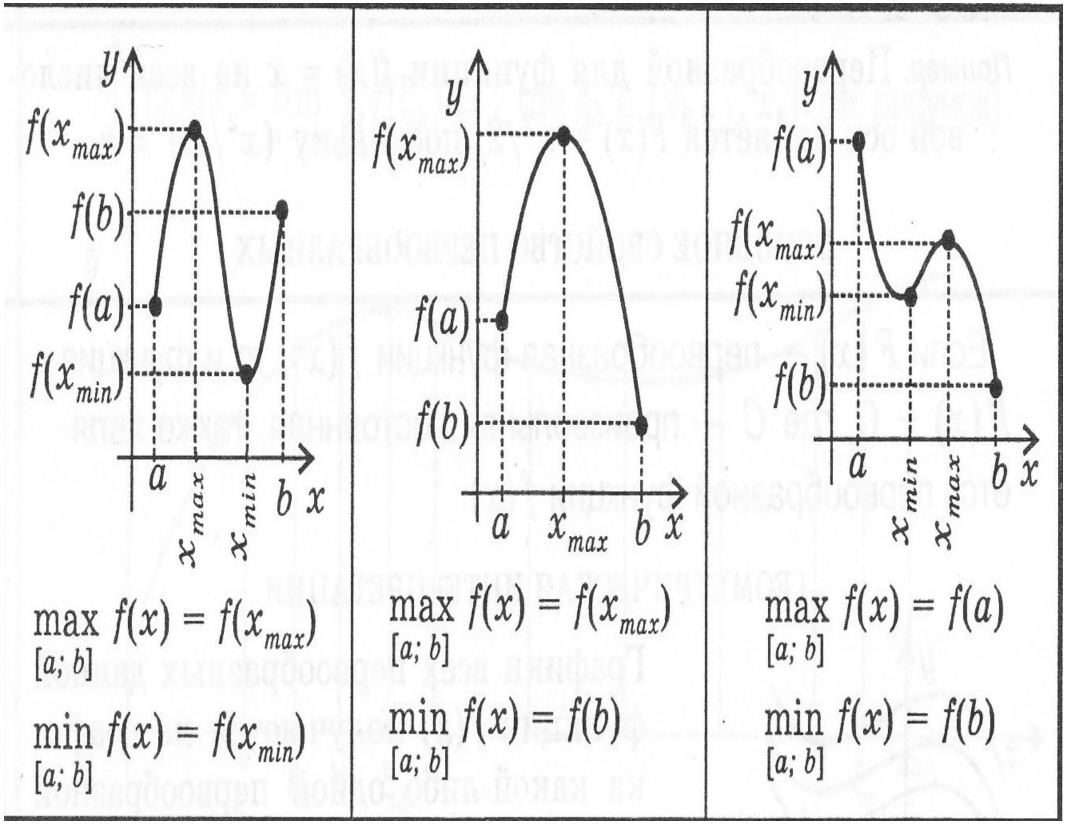


Алгоритм застосування похідної для знаходження інтервалів зростання та спадання функції та її екстремумів

Кроки	*Приклад для функції* *$Y=2X^3 3X^2-36X+5$*
1.Знайти область визначення функції і інтервали на яких функція неперервна.	Обл. визначення: R Функція неперервна для X є R
2.Знайти похідну функції	$f'(x)=6x^2\ \ 6x-36$
3.Знайти критичні точки (точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує).	f(x)=0 якщо x= -2,x= 3
4. У кожному інтервалі, на які область визначення функції розбивається критичними точками, визначити знак похідної і характер зміни функції (за допомогою достатніх умов монотонності)	
5.Відносно кожної критичної точки визначити чи є вона точкою максимума, мінімума або не є точкою екстремума	X=-2 точка максимума X=3 точка мінімума
. 6.Записати висновок дослідження функції проміжки монотонності і екстремуми	f(x) зростає , якщо x є(-∞;-2) і x є(3;∞) f(x)спадає, якщо x є(-2;3) Xmax= -2,Ymax=f(-2)=49 Xmin=3, Ymin=f(3)=-76

Найбільше і найменше значення функції, неперервної на відрізку.

Функція, неперервна на відрізку досягає свого найбільшого і найменшого значення на цьому відрізку у критичних точках, які належать відрізку, або на його кінцях.



Алгоритм знаходження найбільшого і найменшого значень функції, неперервної на відрізку

Кроки	Приклад для функції $Y=2x^3-3X^2 - 36x +5$ на відрізку[0;4]
1.Знайти похідну $f'(x)$	$f'(x)=6x^2 -6x -36$
2.Знайти на даному відрізку критичні точки(точки, в яких $f'(x)=0$ або не існує)	$f'(x)=0$ якщо $x=-2$ і якщо $x=3$ Відрізку [0;4] належить тільки $x=3$
3.Знайти значення функції у критичних точках і на кінцях відрізку.	$f(0)=5$ $f(3)=-76$ $f(4)=-59$
4.З одержаних значень вибрати найбільше та найменше значення.	$\max f(x)=f(0)=5$ [0;4] $\min f(x)=f(3)=-76$ [0;4]

Схема повного дослідження функції

1.*Знайти Д(у).

*Дослідити на парність.

*Дослідити на періодичність.

*Знайти нулі функції та точки перетину графіка з віссю ОУ.

2.*Знайти F’(x).

*Знайти критичні точки.

*Знайти проміжки монотонності та точки екстремуму.

3. *Знайти F’’(x).

*Розв”язати рівняння F’’(x) = 0.

*Знайти точки перегину та проміжки випуклості і вогнутості.

4. *Знайти асимптоти: вертикальні та похилі (горизонтальні як частковий випадок) .

5.*При потребі обчислити координати контрольних точок.

6. *Побудувати графік функції.

7. *Знайти Е(у).

Розв’язування типових вправ

1.Зразок оформлення розв’язання завдання на дослідження функції на монотонність.

$y= 4x^3+6x^2 -8$

Розв’язування.

1)$D(y)=R$

2)$y'=12x^2+12x=12x(x+1)$

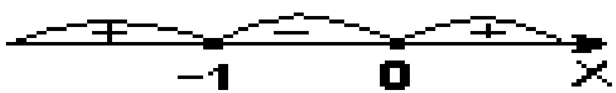
3)$12x(x+1)>0$, якщо $x(x+1)>0$

4)$12x(x+1)<0$, якщо $x(x+1) <0$

Розв’яжемо кожне з нерівностей методом інтервалів

$g(x)= x(x+1)$; $D(g)=R$

нулі функції: $g(x)=0$, $x(x+1)=0$; $x_1=0$; $x_2=-1$



$g(x) >0$, якщо x Є $(-\infty;-1)$ та x Є $(0;+\infty)$

$g(x) < 0$, якщо x Є $(-1; 0)$

Маємо: функція $y= 4x^3+6x^2 -8$ – зростає, якщо x Є $(-\infty;-1)$ та x Є $(0;+\infty)$,

спадає, якщо x Є $(-1; 0)$

Відповідь: $(-1; 0)$ – інтервал спадання функції

$(-\infty;-1)$ U $(0;+\infty)$ - інтервал зростання функції.

2. Зразок оформлення розв’язання вправи на знаходження найбільшого та найменшого значення функції на проміжку.

Знайдіть найбільше і найменше значення функції

f (x) = x3 – 3x2 – 45x + 2 на проміжку [-5; 7]

Розв’язання:

f’ (x) = 3x2 – 6x – 45

f’ (x) існує для всіх x є R, тоді критичних точок немає, а стаціонарні точки найдемо за умови f’ (x) = 0, тоді 3x2 – 6x – 45

x2 – 2x – 15 = 0

x1 = -3; x2 = 5

-3 Є [-5; 7]; 5 Є [-5; 7]

f(-5) = (-5)3 – 3 · (-5)2 – 45 · (-5) + 2 = 27

f (-3) = (-3)3 – 3 · (-3)2 – 45 · (-3) + 2 = 83

f (5) = 53 – 3 · 52 – 45 · 5 + 2 = - 173

f (7) = 73 – 3 · 72 – 45 · 7 + 2 = - 117

- 173 < - 117 < 27 < 83

min f (x) = f (5) = - 173
[-5; 7]

max f (x) = f (-3) = 83
[-5; 7]

Зра

Колективна робота :

Дослідіть функцію $y=\dfrac{x^4+24}{x^2}$ на монотонність та екстремуми.

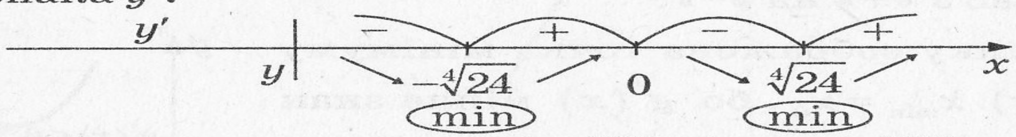
Розв'язання

1) $D(y)$: $x^2\neq 0$, $x\neq 0$, $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$, функція неперервна на $D(y)$.

2) $$y'=\frac{4x^3\cdot x^2-(x^4+24)\cdot 2x}{x^4}=\frac{4x^5-2x^5-48x}{x^4}=\frac{2x^5-48x}{x^4}=$$
$$=\frac{2x(x^4-24)}{x^4}=\frac{2(x^4-24)}{x^3}=\frac{2(x^2-\sqrt{24})(x^2+\sqrt{24})}{x^3}=$$
$$=\frac{2(x-\sqrt[4]{24})(x+\sqrt[4]{24})(x^2+\sqrt{24})}{x^3}$$

3) $y'=0$, якщо $x_1=\sqrt[4]{24}$; $x_2=-\sqrt[4]{24}$ — це стаціонарні точки. y' не існує в точці $x=0$, але 0 не є критичною точкою, бо $x=0$ — точка розриву функції.

4) На рисунку зображено проміжки зростання і спадання y залежно від знака y'.



5) Функція зростає, якщо $x\in(-\sqrt[4]{24};0)$ і $x\in(\sqrt[4]{24};+\infty)$; функція спадає, якщо $x\in(-\infty;-\sqrt[4]{24})$ і $x\in(0;\sqrt[4]{24})$. Отже,

$$y_{\min}=y(-\sqrt[4]{24})=\frac{(-\sqrt[4]{24})^4+24}{(-\sqrt[4]{24})^2}=\frac{24+24}{\sqrt{24}}=\frac{48\cdot\sqrt{24}}{\sqrt{24}\sqrt{24}}=2\sqrt{24}=4\sqrt{6}.$$

$$y_{\min}=y(\sqrt[4]{24})=\frac{(\sqrt[4]{24})^4+24}{(\sqrt[4]{24})^2}=\frac{48}{\sqrt{24}}=4\sqrt{6}.$$

Відповідь: функція зростає, якщо $x\in(-\sqrt[4]{24};0)$ і $x\in(\sqrt[4]{24};+\infty)$; функція спадає, якщо $x\in(-\infty;-\sqrt[4]{24})$ і $x\in(0;\sqrt[4]{24})$.

$y_{\min}=y(-\sqrt[4]{24})=y(\sqrt[4]{24})=4\sqrt{6}$.

4. Дослідити функцію і побудувати графік функції

Дослідити функцію $y=1-2x^2-\frac{x^3}{3}$ і побудувати графік. ([1]: вправа № 52 (2)).

Розв'язання

1) $D(y)=R$.

2) Ox: $1-2x^2-\frac{x^3}{3}=0$; $3-6x^2-x^3=0$ — знайти необхідні додаткові точки важко, Oy: $y=1-2\cdot 0-\frac{0^3}{3}=1$.

3) $y(-x)=1-2\cdot(-x)^2-\frac{(-x)^3}{3}=1-2x^2+\frac{x^3}{3}$;

$y(-x)\neq y(x)$, $y(-x)\neq -y(x)$ — функція не є парною, не є непарною, функція неперіодична.

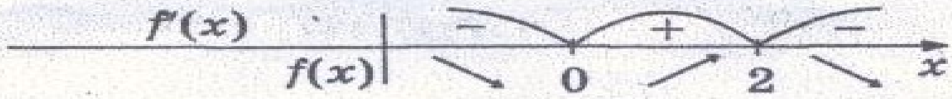
4) $y'(x)=-4x-\frac{3x^2}{3}=-4x-x^2=-x(4+x)$. $D(y')=R$.

Критичних точок немає.

Знайдемо стаціонарні точки з рівняння $y'(x)=0$: $-x(4+x)=0$, $x_1=0$, $x_2=-4$.

5) Складемо таблицю:

x	$(-\infty;-4)$	-4	$(-4;0)$	0	$(0;+\infty)$
$y'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$y(x)$	$\searrow$	$-9\frac{2}{3}$	$\nearrow$	1	$\searrow$
		min		max	



$f(x)$ зростає, якщо $x \in (0; 2)$,

$f(x)$ спадає, якщо $x \in (-\infty; 0)$ і $x \in (2; +\infty)$.

Відповідь: $(0; 2)$ — інтервал зростання; $(-\infty; 0)$, $(2; +\infty)$ — інтервали спадання.

4. $g(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 2$; $D(g) = R$;

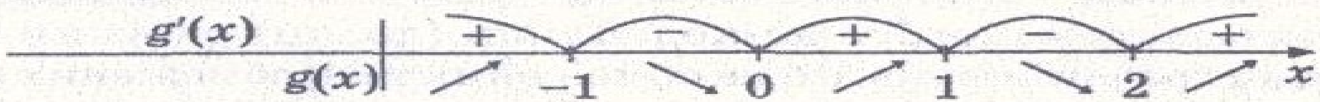
$g'(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x = x(x^3 - 2x^2 - x + 2)$; $g'(x) = 0$;

$x = 0$ або $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$;

$x^2(x-2) - 1(x-2) = 0$; $(x-2)(x^2-1) = 0$; $(x-2)(x-1)(x+1) = 0$;

$x = 2$ або $x = 1$, або $x = -1$; $g'(x) = x(x-2)(x-1)(x+1)$.

Таким чином, -1; 0; 1; 2 — нулі $g(x)$.



$g(x)$ зростає, якщо $x \in (-\infty; -1)$, $x \in (0; 1)$, $x \in (2; +\infty)$;

$g(x)$ спадає, якщо $x \in (-1; 0)$, $x \in (1; 2)$.

Відповідь: $(-\infty; -1)$, $(0; 1)$, $(2; +\infty)$ — інтервали зростання;

$(-1; 0)$, $(1; 2)$ — інтервали спадання.

Зразок розв’язання задачі на находження найбільшого та найменшого значення

1. Число 2 подано у вигляді суми двох доданків так, що перший доданок більший за квадрат другого на максимально можливе число. Запишіть це число.

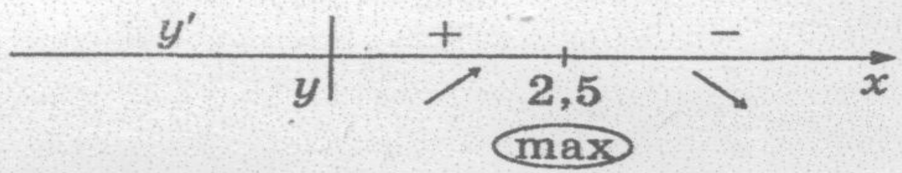
Розв’язання

Нехай перше число дорівнює x, тоді друге число $(2-x)$.

Складемо різницю: $x-(2-x)^2$; позначимо цю різницю буквою y, тоді маємо функцію $y(x)=x-(2-x)^2$. Необхідно знайти $y_{\max}$, причому обмежень для x немає, тобто $x\in R$.

$y(x)=x-\left(4-4x+x^2\right)=x-4+4x-x^2=-x^2+5x-4$.

$y'(x)=-2x+5$; $y'(x)=0$, якщо $x=2{,}5$ — стаціонарна точка. Критичних точок немає, бо $y'(x)$ існує, якщо $x\in R$.



$x_{\max}=2{,}5$, тоді

$y_{\max}=y(2{,}5)=-2{,}5^2+5\cdot 2{,}5-4=-6{,}25+12{,}5-4=2{,}25$.

Відповідь: 2,25.

Тренувальні тести

Тест №1. Знайдіть проміжки зростання функції

а) $y= 3x^2-12x +8$

1) $(-\infty;-2)$ 2) $(-2;+\infty)$ 3) $(-\infty;2)$ 4) $(2;+\infty)$,

б) $y= x^3-3x$

1) $(-1;1)$ 2) $(-\infty;-1)$ і $(1;+\infty)$ 3) $(-\infty;-1)$ 4) $(1;+\infty)$,

в) $y= e^x – x$

1) $(-1;+ \infty)$ 2) $(-\infty;1)$ 3) $(0;+\infty)$ 4) $(-\infty;0)$

Тест №2. Знайдіть проміжки спадання функції

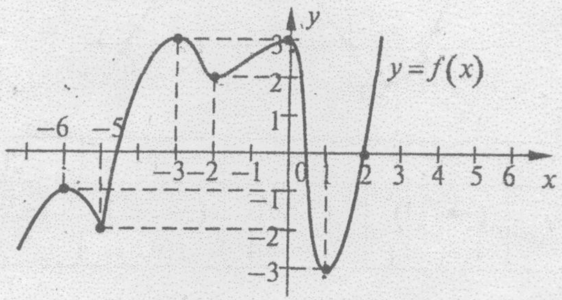
а) $y = x^3 - x$

1) (-1;1) 2) (-∞;-1) і (1;+∞) 3) (-∞;-1) 4) (1;+∞),

б) $y = 10x^2 - 420x + 151$

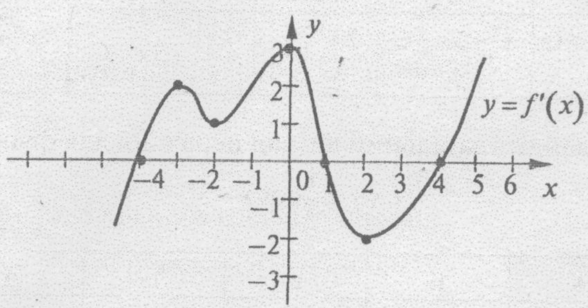
1)(21;+ ∞) 2) (-∞;21) 3) (-21;+∞) 4) (-∞;-21)

1. На *рисунку* зображено графік функції $y=f(x)$. Користуючись зображенням, укажіть точки екстремуму функції $y=f(x)$.



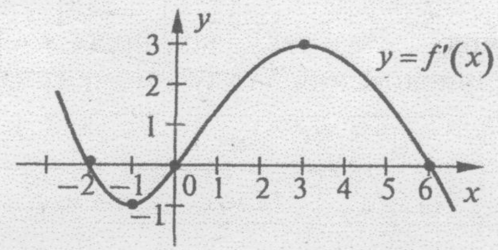
А	Б	В	Г	Д
−6; −3; 0; 2	−5; −2; 1; 2	−6; −3; −2; 0; 1	−6; −5; −3; −2; 0; 1	−6; −3; −2; 1

2. На *рисунку* зображено графік похідної функції $y=f(x)$. Користуючись зображенням, укажіть точки екстремуму функції $y=f(x)$.



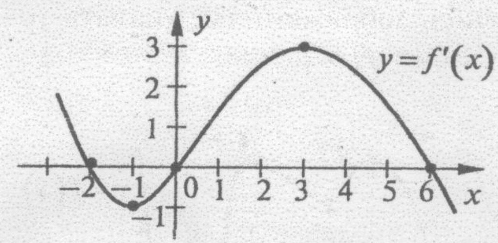
А	Б	В	Г	Д
−4; 1; 4	−3; −2; 0; 2	−3; 0	−2; 2	−4; 0; 1; 4

3. На *рисунку* зображено графік похідної функції $y=f(x)$. Користуючись зображенням, укажіть проміжки зростання функції $y=f(x)$.



А	Б	В	Г	Д
$(-1;3)$	$(-\infty;-1)$ і $(3;+\infty)$	$(-2;0)$ і $(6;+\infty)$	$(-\infty;-2)$ і $(0;6)$	$(-2;6)$

4. На *рисунку* зображено графік похідної функції $y=f(x)$. Користуючись зображенням, укажіть проміжки спадання функції $y=f(x)$.



А	Б	В	Г	Д
$(-1;3)$	$(-\infty;-1)$ і $(3;+\infty)$	$(-2;0)$ і $(6;+\infty)$	$(-\infty;-2)$ і $(0;6)$	$(-2;6)$

Тест №4

1°. Знайдіть проміжки зростання функції $y = 3x^2 - 12x + 8$.

1) $(-\infty; -2)$; 2) $(-2; +\infty)$;

3) $(-\infty; 2)$; 4) $(2; +\infty)$.

2°. Знайдіть критичні точки функції $y = x^5 - 5x$.

1) -1; 2) 1; 3) $0; 1$; 4) $-1; 1$.

3°. Знайдіть точки екстремуму функції $y = 3x - x^3$.

1) $x_{min} = -1,\ x_{max} = 1$;

2) $x_{min} = 1,\ x_{max} = -1$;

3) $x_{max} = 1$; 4) $x_{min} = 1$.

4°. Знайдіть екстремуми функції $y = 2x^4 - 8x - 1$.

1) $y_{min} = 7$; 2) $y_{max} = -7$;

3) $y_{min} = -7$; 4) $y_{max} = 7$.

5°. Знайдіть найменше значення функції $y = x^3 - \frac{1}{3}x$ на проміжку $[-1; 1]$.

1) $-\frac{2}{27}$; 2) $-\frac{2}{3}$; 3) $\frac{2}{3}$; 4) $\frac{2}{27}$.

6°. Скільки точок екстремуму має функція $y = 5x^6 - 6x^5 - 9$?

7°. Обчисліть найбільше значення функції

$$y = \frac{2}{3}x^3 + 3\frac{1}{2}x^2 - 4x + 1\frac{2}{3}$$

на проміжку $[-5; -1]$.

8*. З усіх прямокутників, діагональ яких дорівнює $10\sqrt{2}$, знайдіть такий, площа якого буде найбільшою. У відповідь запишіть периметр цього прямокутника.