Застосування похідної до розв'язування прикладних задач

Розв'язання багатьох практичних задач зводяться до знаходження найбіль та найменшого значень неперервної на відрізку функції, тобто знаходжен екстремумів.
Загальний метод розв'язування задач на екстремум за допомогою похідно складається з трьох етапів:

- ***формалізація*** (задача „перекладається" мовою функцій, для цього обирається зручний параметр x, через який шукану величину виражають як функцію ***f(x)***;

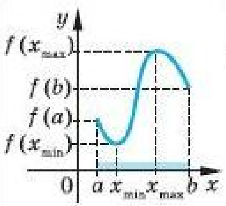
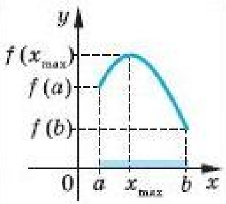
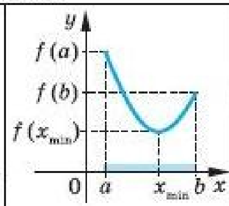
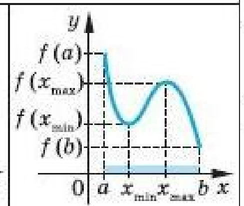
- ***розв'язання*** одержаної математичної ***задачі;***

- ***інтерпретація*** знайденого ***розв'язку*** („переклад" його з мови математики у терміни первинної задачі).

Таблиця – схема плану дій

6.3. Найбільше і найменше значення функції

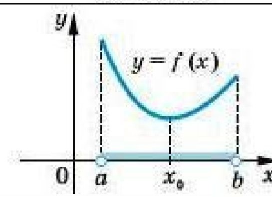
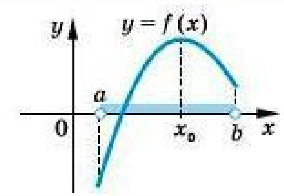
Таблиця 10

1. Найбільше і найменше значення функції, неперервної на відрізку			
Властивість			
Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку і має на ньому скінченне число критичних точок, то вона набуває найбільшого і найменшого значення на цьому відрізку або в критичних точках, які належать цьому відрізку, або на кінцях відрізка.			
Приклади			
 	 	 	
$\max\limits_{[a;b]} f(x)=f(x_{max})$	$\max\limits_{[a;b]} f(x)=f(x_{max})$	$\max\limits_{[a;b]} f(x)=f(a)$	$\max\limits_{[a;b]} f(x)=f(a)$
$\min\limits_{[a;b]} f(x)=f(x_{min})$	$\min\limits_{[a;b]} f(x)=f(b)$	$\min\limits_{[a;b]} f(x)=f(x_{min})$	$\min\limits_{[a;b]} f(x)=f(b)$

2. Знаходження найбільшого і найменшого значень функції, неперервної на відрізку	
Схема	Приклад Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x)=x^2-12x+12$ на відрізку $[1; 3]$.
1. Впевнитися, що заданий відрізок входить до області визначення функції $f(x)$.	Область визначення заданої функції — всі дійсні числа ($D(f)=R$), отже, заданий відрізок входить до області визначення функції $f(x)$.
2. Знайти похідну $f'(x)$.	$f'(x)=3x^2-12$.
3. Знайти критичні точки: $f'(x)=0$ або не існує.	$f'(x)$ існує на всій області визначення функції $f(x)$ (отже, функція $f(x)$ неперервна на заданому відрізку). $f'(x)=0$; $3x^2-12=0$ при $x=2$ або $x=-2$.
4. Вибрати критичні точки, які належать заданому відрізку.	Заданому відрізку $[1; 3]$ належить лише критична точка $x=2$.

Продовж. табл. 10

5. Обчислити значення функції в критичних точках і на кінцях відрізка.	$f(1)=1$; $f(2)=-4$; $f(3)=3$.
6. Порівняти одержані значення функції і вибрати з них найменше і найбільше.	$\max\limits_{[1;3]} f(x)=f(3)=3$, $\min\limits_{[1;3]} f(x)=f(2)=-4$.

3. Знаходження найбільшого чи найменшого значення функції, неперервної на інтервалі	
Властивість	Ілюстрація
Якщо неперервна функція $f(x)$ має на заданому інтервалі тільки одну точку екстремуму x_0 і це точка мінімуму, то на заданому інтервалі функція набуває свого найменшого значення в точці x_0.	
Якщо неперервна функція $f(x)$ має на заданому інтервалі тільки одну точку екстремуму x_0 і це точка максимуму, то на заданому інтервалі функція набуває свого найбільшого значення в точці x_0.	

Задача 1 (№19 с.109)

Човен знаходиться на озері на відстані 3 км від найближчої точки А берега. Пасажир човна має намір досягти села В, що розташоване на березі на відстані 5 км від А (ділянка АВ берега вважається прямолінійною). Човен рухається зі швидкістю 4 км/год, а пасажир, вийшовши з човна, може за годину пройти 5 км. До якого пункту на березі має пристати човен, щоб пасажир прибув у село В за найкоротший час?

Дано:

$S_1 = 3$ км

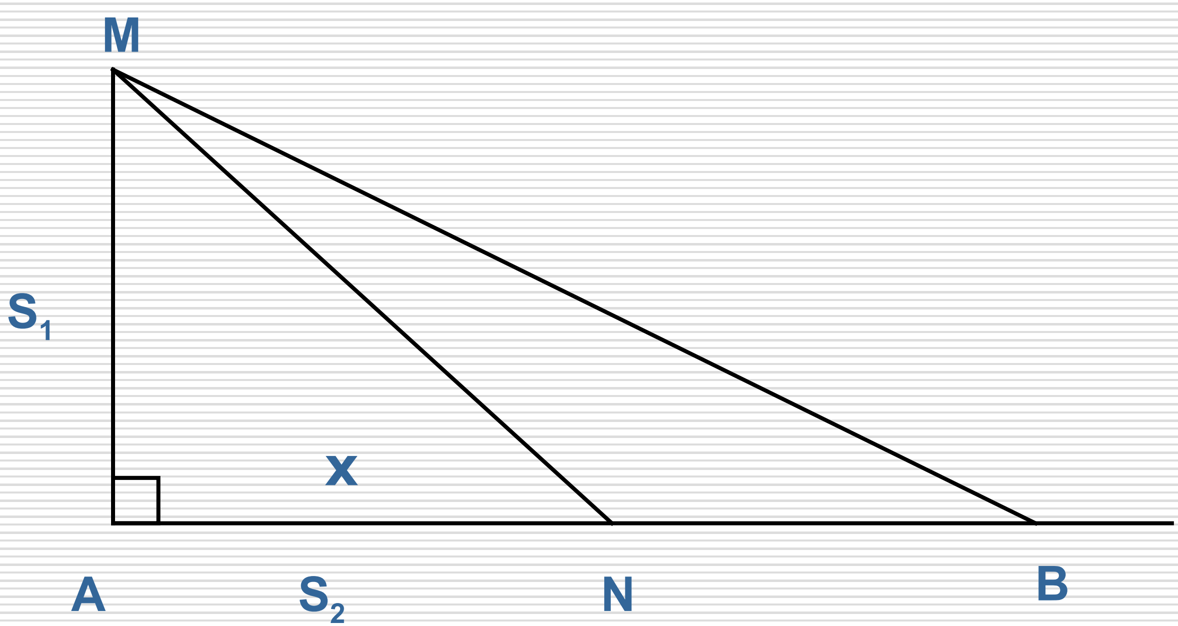
$S_2 = 5$ км

$\upsilon_1 = 4$ км/год

$\upsilon_2 = 5$ км/год

---

t_{min} – ?



Дано:

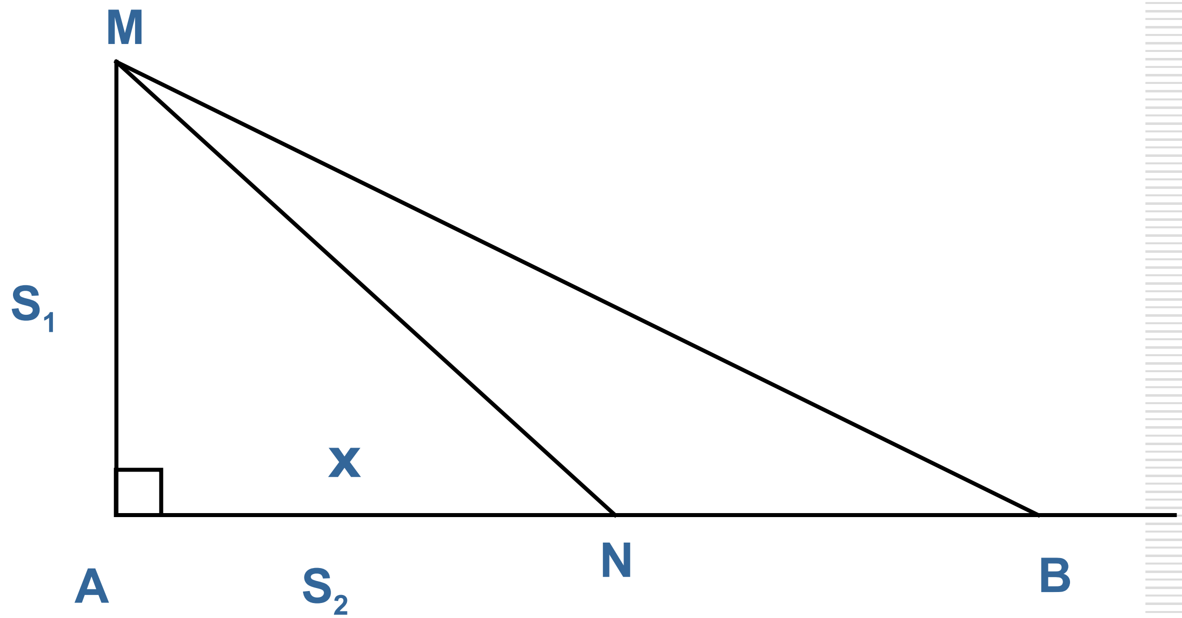
$S_1 = 3$ км

$S_2 = 5$ км

$\upsilon_1 = 4$ км/год

$\upsilon_2 = 5$ км/год

$t_{min} - ?$



Розв'язання

$S_1 = AM$, $S_2 = AB$. Нехай шукана точка N. AN=x, $0 \le x \le S_2$, $BN = S_2 - x$,

$$MN = \sqrt{S_1^2 + x^2}\ , \quad t_1 = \frac{MN}{\upsilon_1} = \frac{\sqrt{S_1^2 + x^2}}{\upsilon_1} = \frac{\sqrt{3^2 + x^2}}{4} = \frac{\sqrt{9 + x^2}}{4};$$

$$t_2 = \frac{BN}{\upsilon_2} = \frac{S_2 - x}{\upsilon_2} = \frac{5 - x}{5};\ t = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{9 + x^2}}{4} + \frac{5 - x}{5}$$

Знайдемо найменше значення функції t(x) на відрізку [0;5], знайшовши критичну точку для якої $t'(x) = 0$ і обчисливши значення функції в цій точці

$$t'(x) = \frac{2x}{4 \cdot 2\sqrt{9 + x^2}} - \frac{1}{5} = \frac{x}{4\sqrt{9 + x^2}} - \frac{1}{5} = 0 \quad \text{при} \quad \frac{x}{4\sqrt{9 + x^2}} = \frac{1}{5}$$

Дано:

$S_1 = 3$ км

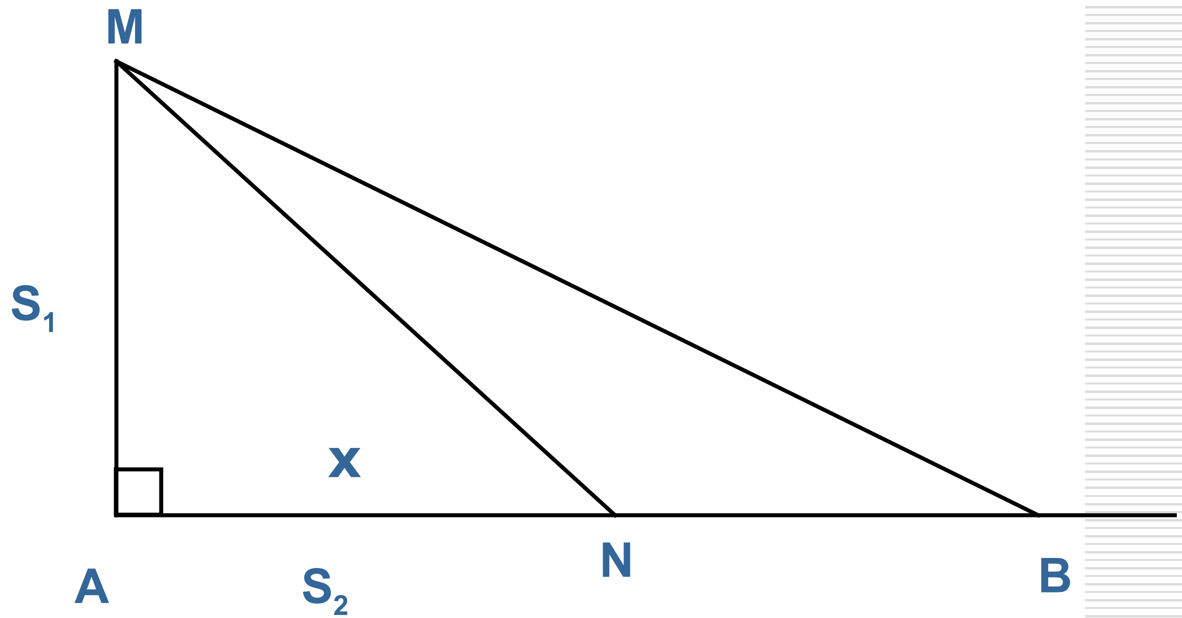
$S_2 = 5$ км

$\upsilon_1 = 4$ км/год

$\upsilon_2 = 5$ км/год

---

t_{min} – ?

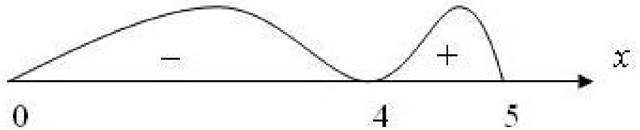


Маємо $5x = 4\sqrt{9 + x^2}$

Піднесемо до квадрату почленно праву і ліву частини, одержимо:

$25x^2 = 144 + 16x^2$; $9x^2 = 144$; $x^2 = 16$.

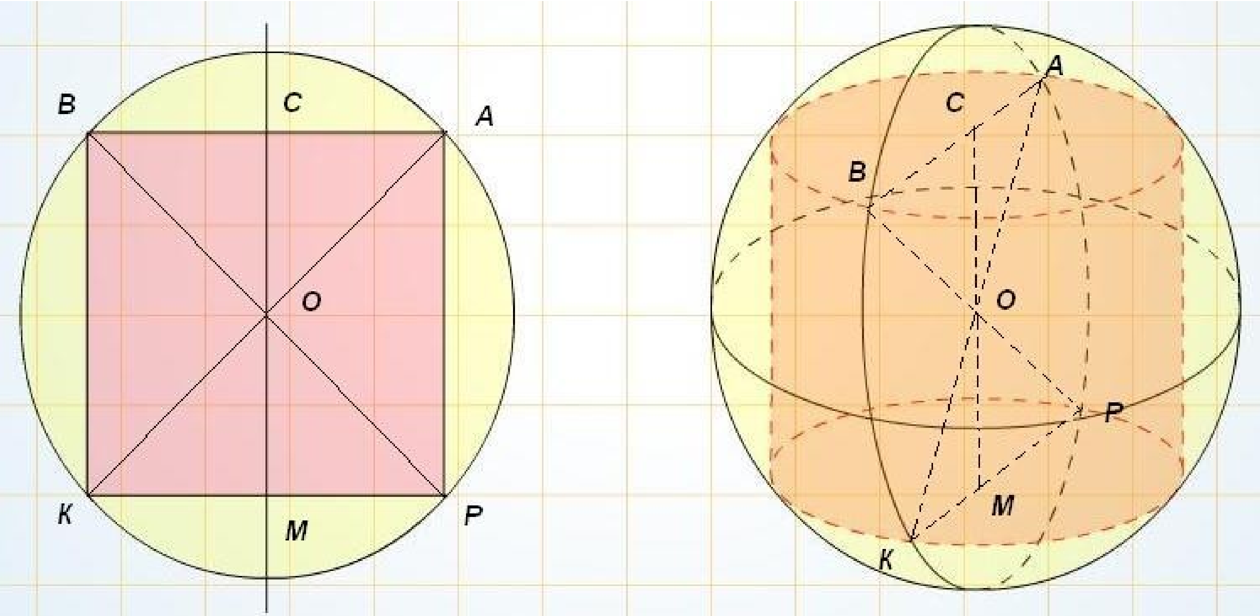
Звідси $x = \pm 4$. $t(0) = 1{,}75$ с; $t(5) = \frac{\sqrt{34}}{4} \approx 1{,}456(c)$; $t(4) = 1{,}45$ с



$t'(x) < 0$ на $(0;4)$; $t'(x) > 0$ на $(4;5)$. Точка $x=4$ є точкою мінімуму функції. Отже, щоб досягти пункту B у найкоротший час пасажир має дістатися берега у точці N, що знаходиться на відстані 4 км від A, або на відстані 1 км від B.

Відповідь: на відстані 1 км від B.

Задача 2. (№42(1) (с.182**)** Серед усіх циліндрів, вписаних у дану кулю, знайдіть той, який має найбільший об’єм.

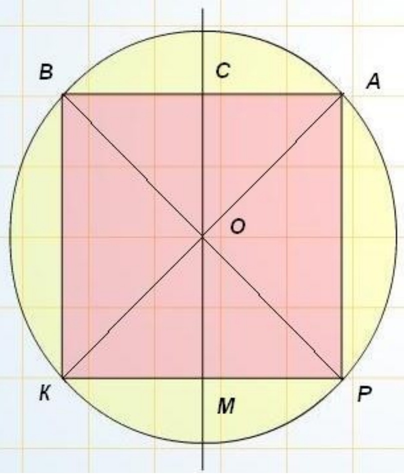


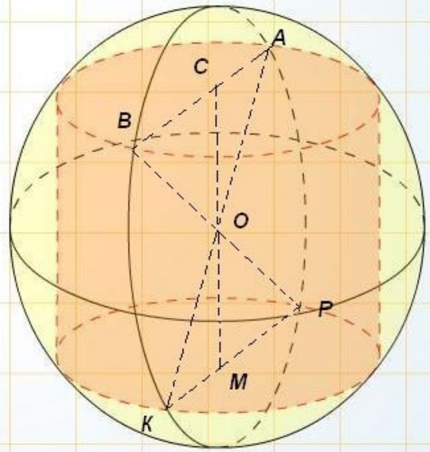
Розв’язання

Дана куля характеризується певним радіусом R=OA=OB=OP=OK. Позначимо через х радіус вписаного в кулю циліндра , тобто х=AC=BC=MP=MK, тоді висоту циліндра BK=AP=CM можна подати як $2\sqrt{R^2-x^2}$, тобто як подвоєний відрізок ОС.

Досліджувану функцію об’єму вписаного циліндра виразимо через величини R – радіус кулі та х- радіус циліндра. Маємо $V=\pi x^2\cdot 2\sqrt{R^2-x^2}$

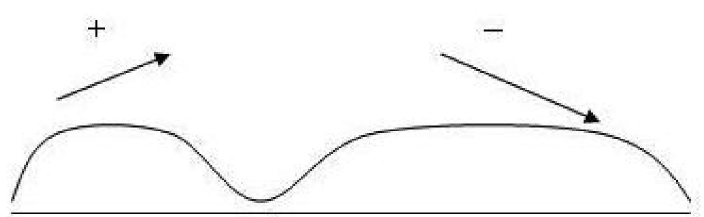
Найбільше значення функція набуває в критичних точках, тому знайдемо їх, обчисливши похідну функції та прирівнявши її до нуля.





$$V' = \pi\left(2x \cdot 2\sqrt{R^2 - x^2} + x^2 \cdot \frac{-2x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right) = \pi\frac{4x(R^2 - x^2) - 2x^3}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{2\pi x(2R^2 - 3x^2)}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

З умови $V' = 0$ маємо $2\pi x\left(2R^2 - 3x^2\right) = 0$, тобто $x_1 = 0$; $x_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}R$



$\sqrt{\frac{2}{3}}R$

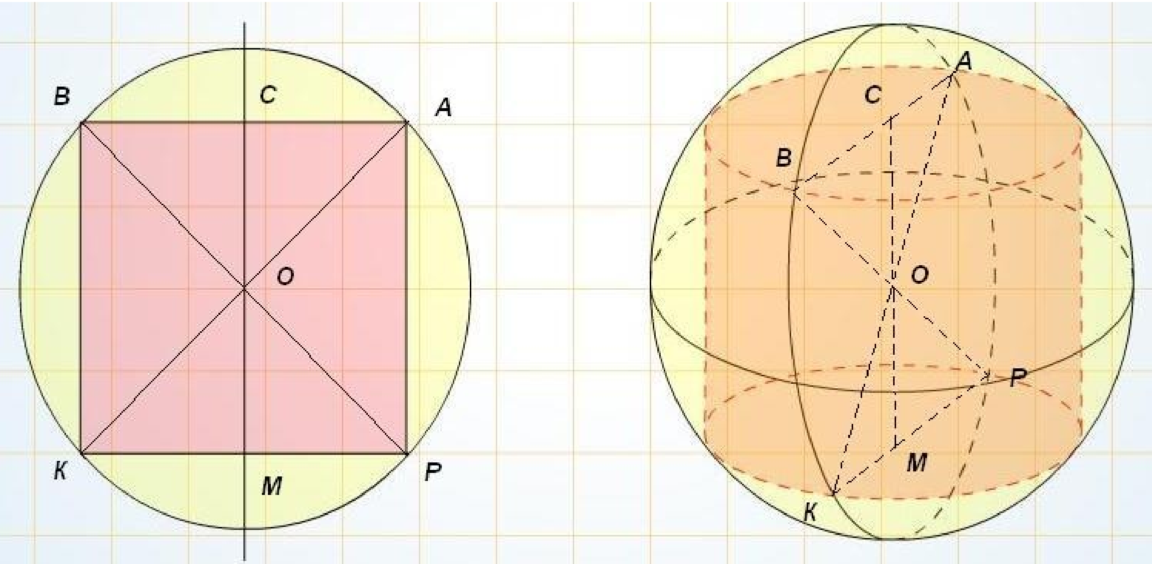
При значенні радіуса циліндра $\sqrt{\frac{2}{3}}R$ функція об'єму циліндра набуває

максимального значення. Висота циліндра при цьому становить $\frac{2}{\sqrt{3}}R$, об'єм циліндра

становитиме $\frac{8}{3\sqrt{3}}\pi R^3$

Задача 3. (№42 (2) с.182.**)**

Серед усіх циліндрів, вписаних у дану кулю, знайдіть той, який має найбільшу бічну поверхню.

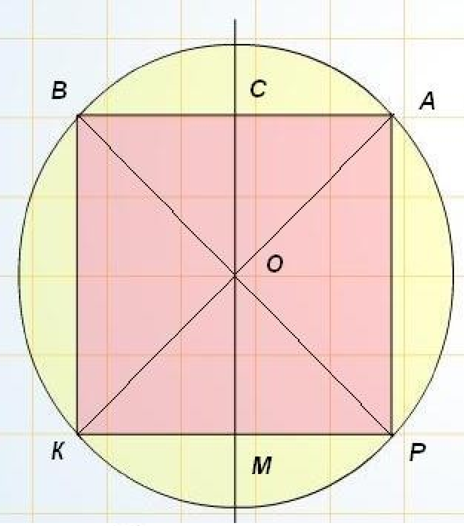


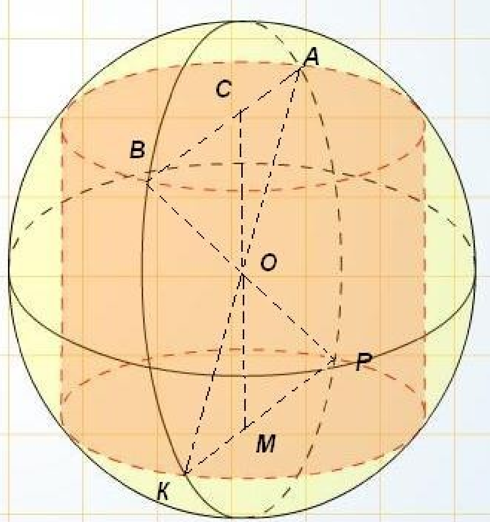
Розв’язання

Задача аналогічна до попередньої, тому скористаємось малюнком і співвідношеннями попередньої задачі. Дана куля характеризується певним радіусом R=OA. Позначимо через x радіус вписаного в кулю циліндра , тобто x=AC, тоді висоту циліндра можна подати як $2\sqrt{R^2 - x^2}$, тобто як подвоєний відрізок OC.

Досліджувану функцію площі бічної поверхні циліндра виразимо через величини R – радіус кулі та x- радіус циліндра. Маємо $S = 2\pi x \cdot 2\sqrt{R^2 - x^2}$

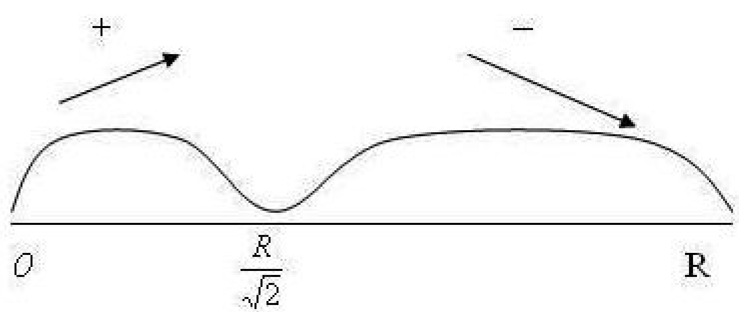
Найбільше значення функція набуває в критичних точках, тому знайдемо їх, обчисливши похідну функції та прирівнявши її до нуля.





$$S' = 2\pi\left(2\sqrt{R^2 - x^2} + x \cdot \frac{-2x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right) = 2\pi\,\frac{2(R^2 - x^2) - 2x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{4\pi(R^2 - 2x^2)}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

З умови $S' = 0$ маємо $4\pi\left(R^2 - 2x^2\right) = 0$, тобто $x = \frac{R}{\sqrt{2}}$



При значенні радіуса циліндра $\frac{R}{\sqrt{2}}$ функція площі бічної поверхні циліндра набуває максимального значення. Висота циліндра при цьому становить $\frac{2}{\sqrt{2}}R$, тобто осьовий переріз – квадрат, а площа бічної поверхні циліндра становитиме $2\pi R^2$