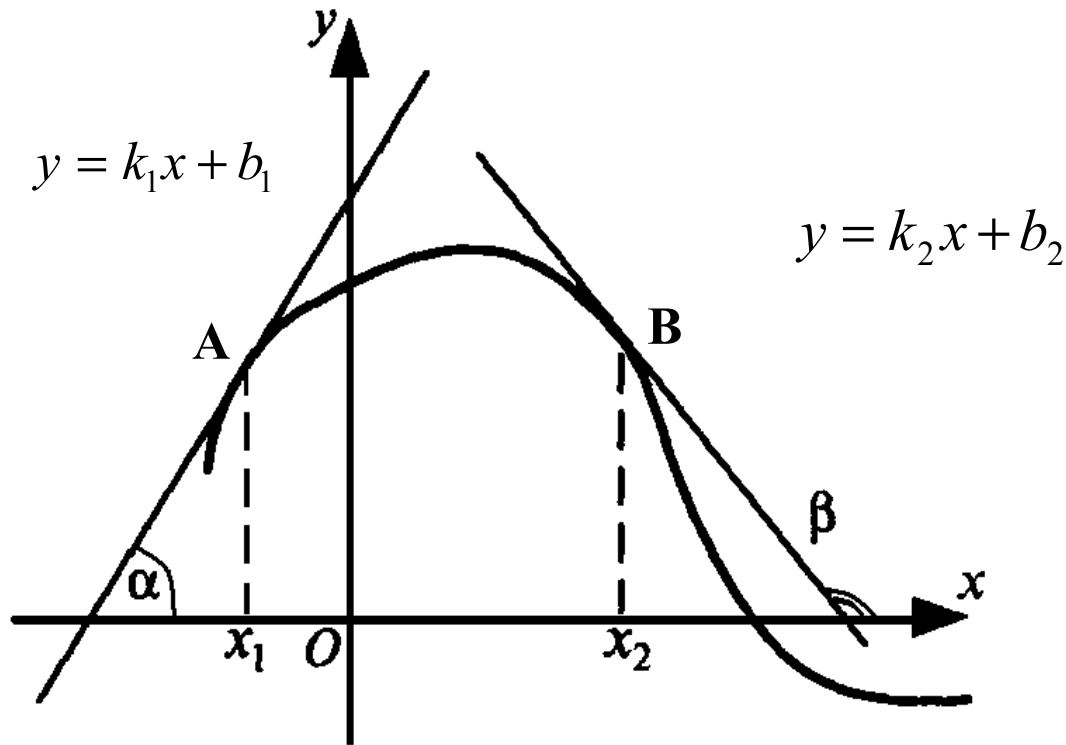


Застосування похідної

План

- Зростання і спадання функції.
- Екстремальні точки.
- Правила знаходження максимуму і мінімуму функції.
- Знаходження найбільшого і найменшого значення функції.
- Загальна схема дослідження функції та побудова її графіка.

Зростання і спадання функції



Ут.А $\alpha < 90^\circ$, $\text{tg}\alpha > 0$, то $k = \text{tg}\alpha = f'(x_1) > 0$, функція зростаюча.

Ут.В $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, $\text{tg}\alpha < 0$, то $k = \text{tg}\alpha = f'(x_1) < 0$, функція спадна.

Знаходження проміжків монотонності функції

Приклад 1. Довести, що функція зростає на всій числовій прямій.

Приклад 2. Довести, що функція спадає на всій числовій прямій.

Приклад 3. Дослідити функцію на монотонність.

Екстремальні точки (точки максимуму і мінімуму)

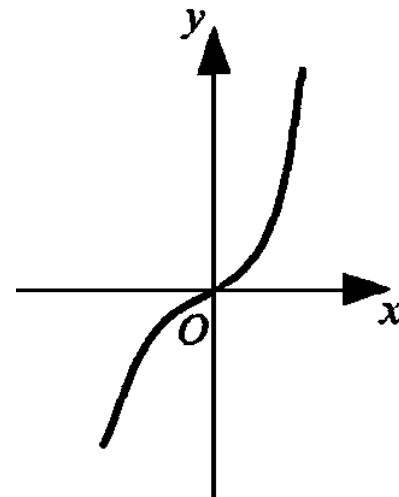
Теорема: якщо функція $y=f(x)$ у внутрішній точці $x_0 \in (a;b)$ має екстремум, то в цій точці похідна $f'(x_0)$, якщо вона існує, дорівнює 0.

Якщо $f'(x_0) = 0$, або не існує, то x_0 - критична точка.

Якщо $f'(x_0) = 0$, то x_0 - стаціонарна точка.

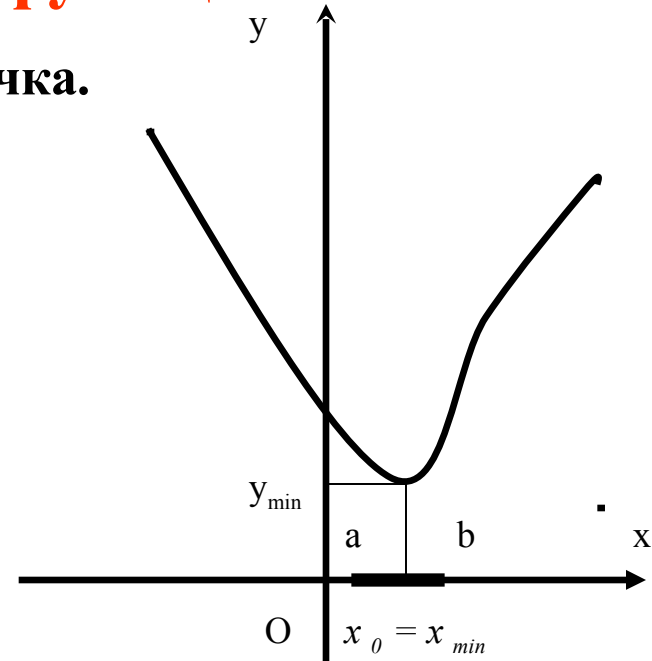
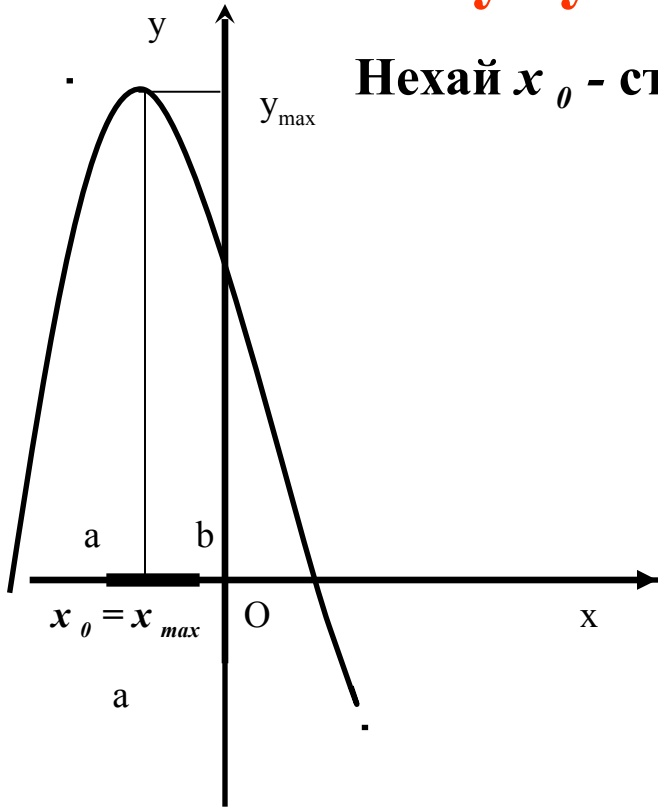
(Стаціонарна точка не завжди є екстремальною.)

$$\begin{aligned}y &= x^3, \\y' &= 3x^2, \\x_0 &= 0.\end{aligned}$$



Правила знаходження максимуму і мінімуму функції

Нехай x_0 - стаціонарна точка.



Правило 1. Якщо для всіх

$$x_0 \in (a; x_0) \quad f'(x_0) > 0$$

і для всіх $x \in (x_0; b) \quad f'(x_0) < 0,$

то $x_0 = x_{max}.$

Якщо для всіх

$$x_0 \in (a; x_0) \quad f'(x_0) < 0$$

і для всіх $x \in (x_0; b) \quad f'(x_0) > 0,$

то $x_0 = x_{min}.$

Правило 2.

Знаходження максимуму і мінімуму функції

2. Якщо $f''(x) < 0$,

то $x_0 = x_{max}$.

2. Якщо $f''(x) > 0$,

то $x_0 = x_{min}$.

Це правило не можна застосовувати при дослідженні на екстремум тих точок, в яких похідна першого порядку не існує, а також до стаціонарних точок, в яких похідна другого порядку дорівнює нулю. У таких випадках треба застосовувати перше правило.

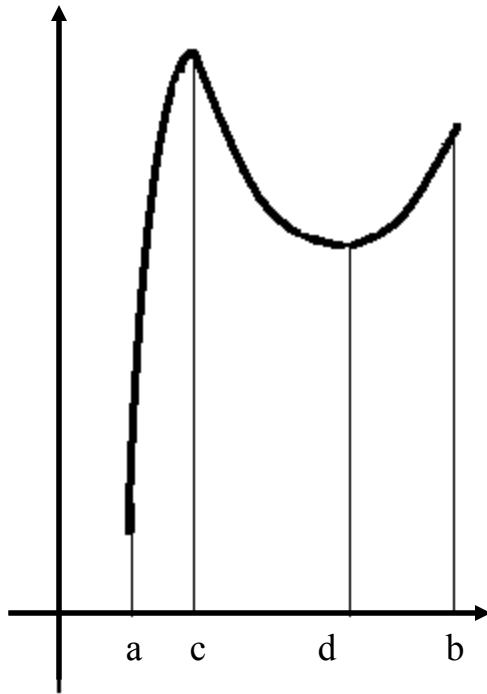
Знаходження

найбільшого і найменшого значення функції

Функція $y=f(x)$ неперервна на $[a; b]$.

Щоб знайти найбільше (найменше) значення функції на відрізку $[a; b]$, треба:

- 1) Знайти всі локальні максимуми (мінімуми);
- 2) Значення функції на кінцях відрізка;
- 3) Найбільше (найменше) число серед утвореної множини і буде найбільшим (найменшим) значенням функції на $[a; b]$.



$$\min f(x)=f(a) ;$$

$$\max f(x)=f(c) ;$$

$[a; b]$

$[a; b]$

Загальна схема дослідження функції та побудова її графіка

1. Область визначення функції $D(y)$.
 2. Нулі функції.
 3. Парність, непарність, періодичність.
 4. Стаціонарні точки.
 5. Точки екстремуму і проміжки монотонності.
 6. Побудова графіка.
-