

**Третій етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики**  
**Завдання. 7 клас**  
**21 січня 2012 року**

1. Є два сплави міді й олова; перший містить 40% міді, а другий - 60%. Скільки потрібно взяти кожного сплаву, щоб одержати 10 кг нового сплаву, який містив би 54% міді?
2. Між сторонами тупого кута  $AOB$  провели три промені  $OC$ ,  $OD$  і  $OE$ , причому  $OC \perp OA$ ,  $OD$  – бісектриса кута  $AOB$  і  $OE$  – бісектриса кута  $BOC$ . Знайдіть величину кута  $DOE$ .
3. Доведіть, що сума квадратів п'яти послідовних натуральних чисел не може дорівнювати квадрату натурального числа.
4. У 7 класі навчаються 28 учнів. Під час диктанту рівно один учень зробив 13 помилок, а всі інші учні – менше. Доведіть, що в класі є принаймні три учні, які зробили однакову кількість помилок.

*На виконання роботи відводиться 3 години.  
Користування довільними зовнішніми джерелами інформації,  
а також будь-якими електронними засобами забороняється*

**Третій етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики**  
**Завдання. 8 клас**  
**21 січня 2012 року**

1. Побудуйте графік функції:  $y = \frac{|10x^2 - 40|}{x^3 - 4x}$ .
2. Знайдіть усі тризначні натуральні числа  $n$  такі, що сума цифр числа  $n$  в 11 разів менша від самого числа  $n$ .
3. Основи рівнобічної трапеції 3 см і 12 см. Середину більшої основи з'єднано з кінцями меншої основи відрізками, які перетинають діагоналі трапеції в двох точках. Знайдіть відстань між цими точками.
4. Спростіть вираз  $\frac{1}{1+a+ab} + \frac{1}{1+b+bc} + \frac{1}{1+c+ca}$ , якщо  $abc = 1$ .
5. За круглим столом сидять 30 інопланетян. Кожен з них прибув або з системи Сіріуса і завжди каже правду, або із системи Андромеди і завжди каже неправду. Кожен із присутніх стверджує, що поряд з ним сидять представники Сіріуса та Андромеди. Скільки інопланетян прилетіли із системи Андромеди?

*На виконання роботи відводиться 4 години.  
Користування довільними зовнішніми джерелами інформації,  
а також будь-якими електронними засобами забороняється*

**Третій етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики**

**Завдання. 9 клас**

**21 січня 2012 року**

1. Побудуйте трикутник, рівновеликий даній трапеції.
2. Знайдіть  $\frac{a^2 + b^2}{ab}$ , якщо  $\frac{a^2 - 6b^2}{ab} = 5$  та числа  $a$  і  $b$  – додатні.
3. На стороні  $AB$  гострокутного трикутника  $ABC$  довільно вибрали точку  $M$ , з якої опустили перпендикуляри  $MK$  та  $MP$  на дві інші сторони трикутника. При якому розміщенні точки  $M$  довжина відрізка  $PK$  буде найменшою?
4. Кожен із хлопців ( Віталій, Михайло та Олександр ) отримав від мами  $n$  грн. Віталій на всю суму мав купити книжки, Михайло – зошити, а Олександр – ручки. На решту мама дозволила купити морозиво. Мамі вони сказали, що Віталікові цих грошей вистачило лише на купівлю однієї книги, Михайлові на купівлю двох зошитів, Олександрові – на купівлю п'яти ручок. Морозива хлопці купили на  $n$  гривень. Доведіть, що принаймні один із хлопців неправильно виконав доручення мами.
5. Знайдіть всі прості числа, які є одночасно сумами й різницями простих чисел.

*На виконання роботи відводиться 4 години.*

*Користування довільними зовнішніми джерелами інформації,  
а також будь-якими електронними засобами забороняється*

**Третій етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики**

**Завдання. 10 клас**

**21 січня 2012 року**

1. Побудуйте графік функції:  $y = |\sqrt{x-3} - 4|$ .
2. Трицифрове число поділили без остачі на 9. Сума цифр частки менша від суми цифр даного числа на 9. Скільки трицифрових чисел мають цю властивість?
3. Розв'яжіть рівняння:  $\frac{1^2}{1^4 + 1} + \frac{2^2 - 1}{2^4 + 2} + \frac{3^2 - 2}{3^4 + 3} + \dots + \frac{100^2 - 99}{100^4 + 100} = \frac{x}{x + 1}$ .
4. У трикутнику  $ABC$  кут  $A$  дорівнює півсумі двох інших. Пряма  $AM$  перетинає сторону  $BC$  в точці  $M$  так, що  $\angle AMB = 60^\circ$  і  $BM = 2MC$ . Знайдіть кут  $ABC$ .
5. Таблиця розміром  $7 \times 7$  заповнена числами 1, 2, 3, ..., 48, 49, причому будь-які два послідовні числа записані в сусідніх (що мають спільну сторону) клітинках. Яка найбільша кількість простих чисел може опинитись в одному стовпчику?

*На виконання роботи відводиться 4 години.*

*Користування довільними зовнішніми джерелами інформації,  
а також будь-якими електронними засобами забороняється*

**Третій етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики**  
**Завдання. 11 клас**  
**21 січня 2012 року**

1. Доведіть нерівність:  $x^2(4 + \log_2^2 y) + 2x \log_2 y + \log_2^2 y + 1 \geq 0$ .
2. Чи можна в добутку  $1! 2! 3! \dots 20!$  викреслити один з двадцяти факторіалів так, щоб добуток, який залишиться, був квадратом цілого числа?
3. Нехай  $M$  – середина сторони  $BC$  трикутника  $ABC$ . Відомо, що  $AB = 4$ ,  $AM = 1$ . Визначте найменше можливе значення кута  $BAC$ .
4. Розв'яжіть рівняння:  $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(4 - x\sqrt{3})^2} = 1$ .
5. Таблиця розміром  $7 \times 7$  заповнена числами  $1, 2, 3, \dots, 48, 49$ , причому будь-які два послідовні числа записані в сусідніх (що мають спільну сторону) клітинках. Яка найбільша кількість простих чисел може опинитись в одному стовпчику?

*На виконання роботи відводиться 4 години.  
Користування довільними зовнішніми джерелами інформації,  
а також будь-якими електронними засобами забороняється*