

# Всеукраїнська учнівська олімпіада з математики

## III етап

03 лютого 2010 року

### 7 клас

1. У класі кількість відсутніх учнів становить **12,5%** від кількості присутніх. Якщо з класу вийдуть ще **2** учні, то будуть відсутніми **20%** від кількості учнів, що залишилися в класі. Скільки учнів навчається в цьому класі ?
2. Розв'яжіть рівняння  $| | | x - 1 | - 2 | - 1 | = 2$ .
3. Петрик розриває газету на **8** частин, після чого одну з одержаних частин рве ще на **8** частин і так далі. Чи може він у такий спосіб розірвати газету на **2010** частин?
4. П'ять чоловіків **A, B, C, D, E** одягнули капелюхи або білого або чорного кольору, причому, ніхто з них не знає, капелюх якого кольору на ньому. Відомо, що чоловік, який одягнув чорний капелюх, завжди говорить правду, годі як чоловік, який одягнув білий капелюх, завжди говорить неправду. Четверо з них висловили наступні твердження:  
**A:** Я бачу три чорних і один білий капелюх.  
**B:** Я бачу чотири білих капелюхи.  
**C:** Я бачу один чорний і три білих капелюхи.  
**D:** Я бачу чотири чорних капелюхи.  
Визначити, капелюх якого кольору на кожному з чоловіків.

*На виконання роботи відводиться 4 години.*

*Використання калькуляторів забороняється.*

# Всеукраїнська учнівська олімпіада з математики

## III етап

3 лютого 2010 року

### 8 клас

1. Знайдіть суму  $\frac{1 \times 4}{2 \times 3} + \frac{2 \times 5}{3 \times 4} + \dots + \frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}$ .
2. Є ланцюг, що складається із **23** кілець. Кожне кільце має масу **1 грам**. Яку найменшу кількість кілець достатньо розкувати, щоб із них та із частин ланцюга, що утворилися, можна було утворити будь-яку масу: **1 г, 2 г, ..., 23 г** ?
3. Нехай **a, b, c** дійсні числа і **a+b+c=1**. Довести, що  $(a+bc)(b+ac)(c+ab)$  - квадрат числа.
4. Чотирикутник **ABCD** вписаний в коло, **K**—середина дуги **AD**, па якій немає інших вершин чотирикутника. Нехай точки **X** і **Y** - точки перетину прямих **BK** і **CK** з діагоналями. Доведіть, що **XU** паралельна **AD**.
5. Чи існують цілі числа **k** і **l** такі, що  $k^3 + l^3 = 2010$  ?

*На виконання роботи відводиться 4 години.*

*Використання калькуляторів забороняється.*

# Всеукраїнська учнівська олімпіада з математики

## III етап

03 лютого 2010 року

### 9 клас

1. Трава на лузі росте рівномірно, 30 корів можуть спасти її за 4 дні, а 25 – за 6 днів. Скільки корів може пастися на такому лузі безперервно, поки на ньому буде рости трава ?
2. Нехай  $a, b, c$  – додатні числа. Доведіть, що:  
$$\frac{a+b}{a^2+b^2} + \frac{b+c}{b^2+c^2} + \frac{a+c}{a^2+c^2} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$
3.  $P$  – внутрішня точка правильного трикутника  $ABC$ , така, що  $AP^2 = BP^2 + CP^2$ . Доведіть, що  $\angle BPC = 150^\circ$ .
4. На відрізку  $AD = 3$  см як на діаметрі побудували півколо. На дузі півкола відмітили точки  $B$  і  $C$  так, що  $AB = BC = 1$  см. Знайдіть довжину хорди  $CD$ .
5. Доведіть, що значення числового виразу  $2004 \times 2005 \times 2006 \times 2008 \times 2009 \times 2010 + 36$  є квадратом натурального числа.

На виконання роботи відводиться 4 години.

Використання калькуляторів забороняється.

# Всеукраїнська учнівська олімпіада з математики

## III етап

03 лютого 2010 року

### 10 клас

1. Розв'яжіть рівняння:  $\frac{y+z-x}{1} = \frac{z+x-y}{3} = \frac{x+y-z}{5} = \frac{xyz}{6}$ .
2. На дошці записано числа 1, 2, 3, ..., 19, 20. Дозволяється будь-яку пару чисел  $x$  та  $y$  вилучити, а замість них записані число  $x+y+5xy$ . Чи можна наприкінці одержати число **20102009** ?
3. Доведіть, що якщо додатні числа  $a, b, c$  задовольняють умову  $2b + 2c + a \geq 1$ , то має місце нерівність:  $\frac{a^2c}{b} + \frac{b^2(a+b)}{c} + \frac{bc(b+c)}{a} \geq b$ .
4. Нехай  $ABCD$  - чотирикутник, причому такий, що півколо з центром на середині сторони  $AB$  і діаметром, що лежить на стороні  $AB$ , дотикається трьох сторін  $BC, CD, DA$ . Довести, що  $AB^2 = 4BC \times AD$ .
5. Є шахівниця розміром  $2009 \times 2009$ , яка пофарбована у шаховому порядку (всі кутові клітинки чорні). По шахівниці ходить фішка, яка може ходити з клітинки на сусідню по стороні клітинку. Якщо фішка потрапить на деяку клітинку, то ця клітинка змінює свій колір на протилежний. На початку фішка стоїть у лівому нижньому куті. Чи можна за допомогою ходів цієї фішки перефарбувати всі клітинки дошки у чорний колір, якщо ходити відразу у зворотному напрямі заборонено?

На виконання роботи відводиться 4 години.

Використання калькуляторів забороняється.

# Всеукраїнська учнівська олімпіада з математики

## III етап

03 лютого 2010 року

### 11 клас

1. Чи існує натуральне число, десятковий запис якого складається тільки з двійок, та яке можна подати у вигляді суми кубів деяких трьох послідовних натуральних чисел ?
2. Порівняйте два числа:  $\sqrt{2009 + \sqrt{2010}} + \sqrt{2010 + \sqrt{2009}}$  та  $\sqrt{2009 + \sqrt{2009}} + \sqrt{2010 + \sqrt{2010}}$
3. Знайдіть усі натуральні значення  $n$ , при яких число  $3n$  є періодом функції 
$$f(x) = \cos nx \cdot \sin \frac{2009x}{n^2}.$$
4. У трикутнику  $ABC$  проведено бісектриси  $AL$  та  $BT$ , які перетинаються між собою у точці  $I$ , а їх продовження перетинають, описане навколо трикутника  $ABC$ , коло у точках  $E$  та  $D$  відповідно. Відрізок  $DE$  перетинає сторони  $AC$  і  $BC$  у точках  $F$  і  $K$  відповідно. Доведіть, що:
  - а) чотирикутник  $IKCF$  – ромб;
  - б) сторона цього ромба дорівнює  $\sqrt{DF \cdot EK}$
5. Є шахівниця розміром  $2009 \times 2009$ , яка пофарбована у шаховому порядку (всі кутові клітинки чорні). По шахівниці ходить фішка, яка може ходити з клітинки на сусідню по стороні клітинку. Якщо фішка потрапить па деяку клітинку, то ця клітинка змінює свій колір на протилежний. На початку фішка стоїть у лівому нижньому куті. Чи можна за допомогою ходів цієї фішки перефарбувати всі клітинки дошки у чорний колір, якщо ходити відразу у зворотному напрямі заборонено ?

*На виконання роботи відводиться 4 години.  
Використання калькуляторів забороняється.*