

Всеукраїнська олімпіада юних математиків

III етап

22 січня 2008 року

7 клас

1. Через вершину тупого кута, градусна міра якого дорівнює α , проведено промені, перпендикулярні до сторін кута. Промені утворили кут β . Доведіть, що $\alpha + \beta = 180^\circ$.
2. Розв'яжіть рівняння : $|x+5| - |8-x| + x = 3$.
3. Число x таке, що **15%** від нього і **33%** від нього - цілі додатні числа. Яким може бути найменше число x (не обов'язково ціле) з такою властивістю? Відповідь обґрунтуйте.
4. Розкладіть на множники: $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)-24$.
5. Множину чисел **1, 2, 3, . . . 2008** розбили на дві групи. До першої групи віднесли всі числа з непарною сумою цифр, а до другої - з парною. Що більше: сума всіх чисел першої групи, чи сума всіх чисел другої групи?

*На виконання роботи відводиться 4 години
Використання калькуляторів забороняється*

Всеукраїнська олімпіада юних математиків

III етап

22 січня 2008 року

8 клас

1. Торговець мав кілька штук однакових годинників. Якщо він їх усіх продасть по 13 гривень, то матиме 54 гривні збитку, а якщо продасть по 18 гривень, то набере 81 гривню. Скільки було годинників і якої вартості?

2. Доведіть, що для натуральних a

число $\frac{a^5}{120} + \frac{a^4}{12} + \frac{7a^3}{24} + \frac{5a^2}{12} + \frac{a}{5}$ також натуральне.

3. Знайдіть суму:

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2007} + \sqrt{2008}}$$

4. Доведіть, що відрізок, який з'єднує вершину прямого кута з центром квадрата, побудованого зовні на гіпотенузі, ділить прямий кут пополам. Виразіть довжину цього відрізка через катети трикутника.

5. Троє художників іграшкової фабрики мають розфарбувати 2008 дитячих кубиків. Для розфарбовування однієї грані кубика одному художнику потрібно 5 секунд. Грань має бути повністю розфарбованою тільки одним художником, хоча грані одного кубика можуть розфарбовуватися й різними художниками, але одночасно жодні два з цих художників не можуть розфарбовувати грані одного й того самого кубика. За який найменший час художники зможуть впоратися з таким завданням? Відповідь обґрунтуйте.

*На виконання роботи/ відводиться 4 години
Використання калькуляторів забороняється*

Всеукраїнська олімпіада юних математиків

III етап

22 січня 2008 року

9 клас

1. Розв'яжіть рівняння:

$$x^4 + 7x^2 - 12x + 5 = 0$$

2. Їхав дід на ярмарку і віз гирю масою 40 кг. По дорозі гиря впала і розбилася на 4 частини. Визначте масу цих частин, якщо відомо, що ними можна зважити будь-яке ціле число кілограмів від одного до сорока.
3. Чи є число $2005 \cdot 2006 \cdot 2007 \cdot 2008 + 1$ точним квадратом ?
4. У трикутнику ABC кут ACB дорівнює 120° . H - точка перетину висот трикутника, O — центр описаного кола, M — середина дуги ACB цього кола. Доведіть, що $HM = MO$.

*На виконання роботи відводиться 3 години
Використання калькуляторів забороняється*

Всеукраїнська олімпіада юних математиків
III етап

22 січня 2008 року

10 клас

1. У трикутнику дві сторони дорівнюють a та b . Бісектриси, проведені до цих двох сторін, перетинаються під кутом 15° . Обчисліть площу трикутника.
2. Доведіть, що рівняння $x^2 - 5x - 4\sqrt{x} + 13 = 0$ не має розв'язків у дійсних числах.
3. Для додатних x, y доведіть нерівність:
$$\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{y^4 + x^2} \leq \frac{1}{xy}$$
4. П'ятикутник $ABCOE$ вписаний у коло. Промені AE і CO перетинаються в точці P , а промені ED і BC - у точці Q так, що $PQ \perp AB$. Доведіть, що $DA = DB$.

*На виконання роботи відводиться 3 години
Використання калькуляторів забороняється*

Всеукраїнська олімпіада юних математиків
III етап

22 січня 2008 року

11 клас

1. Розв'яжіть рівняння:

$$(1+x+x^2)(1+x+x^2+\dots+x^{10})=(1+x+x^2+\dots+x^6)^2$$

2. Про дійсне число K та послідовність дійсних чисел $a_0, a_1, a_2 \dots$ відомо, що

$$a_0=1, a_{2007}=100, a_1 \cdot a_2 > 0, a_{n-1} \cdot a_{n+1} = K \cdot a_n \text{ для кожного } n. \text{ Знайдіть } K.$$

3. Функція $f(x)$ визначена на множині $N \cup \{0\}$ і набуває значень на цій же множині. Для всіх n виконується рівність $f(f(n))+f(n) = 2n+3$. Обчисліть $f(2008)$.

4. Правильний трикутник ABC вписано в коло. Доведіть, що сума квадратів відстаней від довільної точки M на колі до вершин трикутника не залежить від розміщення точки M .

*На виконання роботи відводиться 3 години
Використання калькуляторів забороняється*