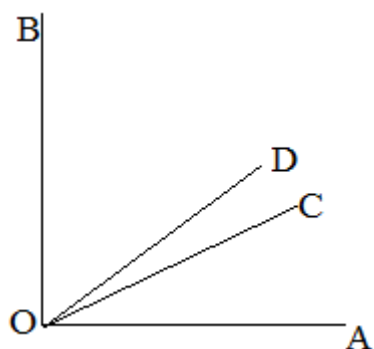


**Третій етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з
математики**

15 січня 2014 року. Розв'язки. 7 клас

1. Нехай початкова ціна товару x , кінцева – $4x$. $x/4x=0,25$. Отже, ціну треба зменшити на 75%.
2. Відповідь. $10^\circ, 15^\circ, 65^\circ, 75^\circ, 25^\circ$.

Припустимо, найменшим із п'яти кутів є кут AOC . Оскільки найбільший кут не може бути меншим за кут BOC , сума найменшого та найбільшого кутів не менша за $\angle AOC + \angle BOC = 90^\circ$, що суперечить умові задачі. З аналогічних міркувань найменшим не може бути кут BOD . Кути AOD та BOC також не можуть бути найменшими, адже $\angle AOD > \angle AOC$ та $\angle BOC > \angle BOD$. Отже, найменшим із п'яти кутів є $\angle COD = 10^\circ$. Найбільшим є один із кутів: AOD чи BOC . Якщо, наприклад, це кут BOC , то за умовою $\angle DOC + \angle BOC = 85^\circ$, або $\angle BOD + 2\angle COD = 85^\circ$. А звідси $\angle BOD = 65^\circ, \angle AOC = 90^\circ - 65^\circ - 10^\circ = 15^\circ, \angle BOC = 75^\circ$ є найбільшим. Аналогічним є випадок, коли найбільшим є кут AOD .



3. Підрахуємо останню цифру числа 2013^{2014} . Вона співпадає з останньою цифрою числа 3^{2014} . Оскільки $3^1 = 3, 3^2 = 9, 3^3 = 27, 3^4 = 81, 3^5 = 273$, то остання цифра степенів числа 3 повторюється з періодом 4. Число $3^{2014} = 3^{4 \cdot 503 + 2}$ закінчується цифрою 9. Отже, остання цифра числа 2013^{2014} також дорівнює 9, а число $2013^{2014} + 3$ закінчується цифрою 2. Однак квадрат натурального числа не може закінчуватися цифрою 2.

4. Відповідь. 8. Якщо у Лесі було n фішок, то сума кількостей фішок у трьох стовпчиках дорівнювала n і у трьох рядках таблиці також дорівнювала n . Сума ж усіх шести кількостей дорівнює $2n$. Шість найменших різних цілих невід'ємних чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5 дають у сумі 15. Отже, $2n > 15$, то $n \geq 8$.

0	0	0
0	1	1
1	2	3

Третій етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики

15 січня 2014 року. Розв'язки. 8 клас

1. Відповідь: 64%

2. Відповідь: $x=1/1007$, $y=1/1006$; $z=1/1008$

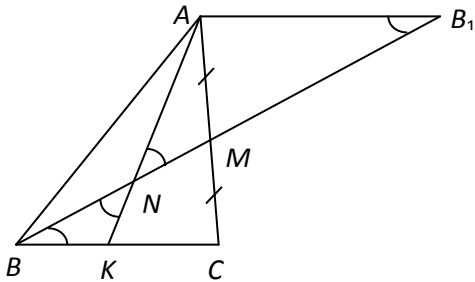
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2013, \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2014, \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = 2015. \end{cases}$$

Додавши всі три рівняння, одержимо: $2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 6042$. Або

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3021$. Визначаючи із кожного із рівнянь одержимо, що

$x=1/1007$; $y=1/1006$; $z=1/1008$.

3. В трикутнику ABC на стороні BC вибрано таку точку K , що відрізок AK перетинає медіану BM в точці N , причому $AN = BC$. Доведіть, що $BK = KN$.



Продовжимо медіану BM за точку M на довжину цієї медіани. Одержимо точку B_1 таку, що $B_1M = MB$. Тоді трикутник AMB_1 дорівнює трикутнику CMB за двома сторонам і кутом між ними (вертикальному). Отже,, $AB_1 = BC = AN$. Значить, трикутник NAB_1 рівнобедрений, тому кут ANB_1 дорівнює куту AB_1N . Крім того, кут AB_1N дорівнює куту NBK , що випливає із рівності трикутників AMB_1 и CMB . Кути BNK и ANB_1 рівні як вертикальні. Із цих рівностей одержимо, що кути BNK и NBK теж рівні. Отже, трикутник BKN рівнобедрений і $BK = KN$.

4. Відповідь: $50123 - 49876 = 247$.

Розв'язання. Очевидно, що ці числа повинні бути п'ятицифровими, бо інакше різниця буде щонайменше п'ятицифровим числом. Справді, найменше шестицифрове число з усіма різними цифрами 102345, найбільше чотирицифрове число – 9876, їх різниця дорівнює 92469. Ще більша різниця буде для випадку інших чисел з різною кількістю цифр.

Для найменшої різниці двох п'ятицифрових чисел очевидно треба, щоб перші цифри відрізнялися на 1. Інакше їх різниця так само буде п'ятицифровим числом. Тепер треба перебрати варіанти, у яких число з більшою першою цифрою доповнюється мінімальними, а з меншою – максимальними. Таким чином треба перевірити, яка з різниць є найменшою.

90123- 87654 = 2469, 80123- 79654 = 469, 70123- 69854 = 269,
60123- 59874 = 249, 50123- 49876 = 247, 40125- 39876 = 249,
30145- 29876 = 269, 20345- 19876 = 469. Тому шукані числа та їх різниця визначаються з рівності: 50123- 49876 = 247.

5. Відповідь: 0.

Розв'язання. Зауважимо, що $a + b + c + d \neq 0$. Домножимо задану рівність на $(a + b + c + d)$, тоді маємо, що

$$\begin{aligned} & \frac{a(a+b+c+d)}{b+c+d} + \frac{b(a+b+c+d)}{c+d+a} + \frac{c(a+b+c+d)}{d+a+b} + \frac{d(a+b+c+d)}{a+b+c} = \\ &= \frac{a^2+a(b+c+d)}{b+c+d} + \frac{b^2+b(c+d+a)}{c+d+a} + \frac{c^2+c(d+a+b)}{d+a+b} + \frac{d^2+d(a+b+c)}{a+b+c} = \\ &= \frac{a^2}{b+c+d} + a + \frac{b^2}{c+d+a} + b + \frac{c^2}{d+a+b} + c + \frac{d^2}{a+b+c} + d = a + b + c + d. \end{aligned}$$

Звідси $\frac{a^2}{b+c+d} + \frac{b^2}{c+d+a} + \frac{c^2}{d+a+b} + \frac{d^2}{a+b+c} = 0$.

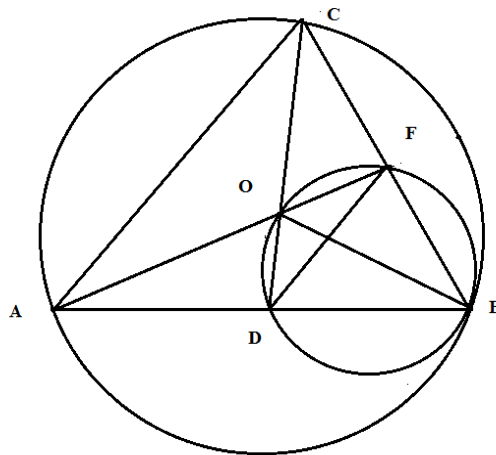
Третій етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики

15 січня 2014 року. Розв'язки. 9 клас

1. Купили 9 горобців, 10 голубів та 11 горлиць.
2. Параболи дотикаються, якщо вони мають рівно одну спільну точку, а тому рівняння $x^2 + 2014x + a = -x^2 + ax + 2014$, а отже і рівняння $2x^2 + (2014 - a)x + (a - 2014) = 0$ повинно мати єдиний корінь. Звідси

$$D = (a - 2014)^2 - 8(a - 2014) = (a - 2014)(a - 2022) = 0. \text{ Отже, } a = 2014 \text{ або } a = 2022.$$

3. Позначимо точку перетину AF і CD як O . Оскільки $\angle CAO = \angle ACO = 30^\circ$, то $CO = AO$ і $\angle AOC = 120^\circ$. Оскільки в трикутнику ABC $\angle A = 50^\circ$, $\angle C = 70^\circ$, то $\angle B = 60^\circ$. Отже, точка O є центром кола, описаного навколо трикутника ABC . Оскільки $\angle DOF = \angle AOC = 120^\circ$, то в чотирикутнику $OFBD$ сума протилежних кутів дорівнює 180° і навколо нього можна описати коло. На хорду OF спираються кути ODF і OFB . Отже, вони рівні. Оскільки $AO = OC = OB$, то $\angle OBF = \angle OCB = 70^\circ - 30^\circ = 40^\circ$.



Отже, $\angle OBF = \angle CDF = 40^\circ$.

4. Якщо n непарне, то обидва числа $n-1$ та $n+1$ парні і, як наслідок, складені. Якщо n не ділиться на 3, то одне з чисел $n-1$ або $n+1$ кратне 3, а отже, складене. Таким чином, n ділиться на 2 і на 3. Якщо n ділиться ще й на деяке просте число p , відмінне від 2 і від 3, то має такі вісім різних натуральних дільників: 1, 2, 3, 6, p , $2p$, $3p$, $6p$. Хай тепер число n не має простих дільників, відмінних від 2 і 3, тобто $n = 2^m \times 3^k$, $m \geq 1, k \geq 1$. Якщо $m = 1$, то $k \geq 3$ (інакше n не буде більшим за 18). У такому випадку число n має вісім дільників: 1, 2, 3, 2×3 , 3^2 , 2×3^2 , 3^3 , 2×3^3 .

Якщо $k=1$, то $m \geq 3$. Тоді число n має дільники: $1, 3, 2, 3 \times 2, 2^2, 3 \times 2^2, 2^3, 3 \times 2^3$.

А у випадку, коли $m \geq 2$ та $k \geq 2$, n ділиться відразу на дев'ять різних натуральних чисел $1, 2, 3, 2 \times 3, 2^2, 3^2, 3 \times 2^2, 2 \times 3^2, 2^2 \times 3^2$. Твердження доведене.

5. Відповідь. Так, можна. Дивись таблицю.

1	1	0	1	1	0	1
0	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1	0
1	0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1	1

**Третій етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з
математики**

15 січня 2014 року. Розв'язки. 10 клас

1. Дійсні числа x та y задовольняють умову:

$$\frac{x+2}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{4-y}{x} \quad \text{Яких значень може набувати добуток } xy?$$

Відповідь: $xy = -2$.

Розв'язання. Домножимо обидві частини на $xy \neq 0$ і одержимо рівності, рівносильні заданій:

$$x^2 + 2x + 5 = 4y - y^2 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1, y = 2 \Rightarrow xy = -2.$$

2. Знаменник дробу менший від квадрата його чисельника на 1. Якщо до чисельника і знаменника дробу додати по 2, то дріб буде більший за $\frac{1}{4}$. Якщо від чисельника і знаменника відняти по 3, то значення дробу стане меншим за $\frac{1}{10}$. Знайдіть цей дріб.

Розв'язання:

Позначимо чисельник дробу через x . Тоді умову задачі можна описати такою системою нерівностей:

$$\begin{cases} \frac{x+2}{x^2-1+2} > \frac{1}{4}; \\ \frac{x-3}{x^2-1-3} < \frac{1}{10}. \end{cases}$$

Ця система рівносильна системі:

$$\begin{cases} x^2 - 4x - 7 < 0, \\ (x^2 - 10x + 26) \cdot (x^2 - 4) > 0. \end{cases}$$

$2 < x < 2 + \sqrt{11}$. Отже чисельник дробу може дорівнювати 3; 4 або 5 і тому шуканим дробом може бути $\frac{3}{8}; \frac{4}{15}; \frac{5}{24}$.

3. Чи має розв'язки в цілих числах система рівнянь

$$\begin{cases} (a+b)(a+c)(a+d) = 2, \\ (b+a)(b+c)(b+d) = 0, \\ (c+a)(c+b)(c+d) = 0, \\ (d+a)(d+b)(d+c) = 3 \end{cases} \quad \text{Дійсно, нехай } a, b, c, d \text{ – розв'язок даної системи в цілих}$$

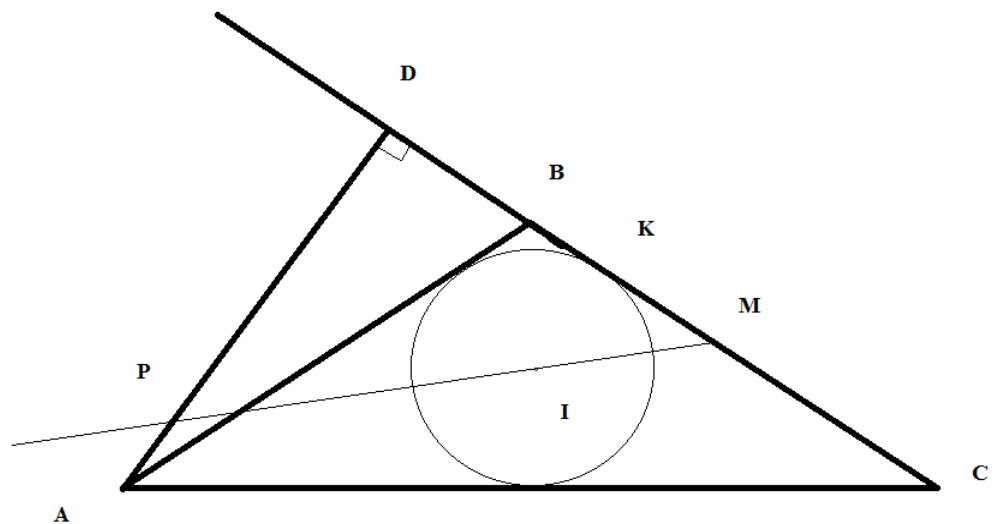
числах. Тоді із другого рівняння випливає, що хоч би одне із чисел $b+a, b+c,$

$b+d$ дорівнює нулю. Але із першого рівняння слідує, що $b+a \neq 0$; аналогічно із четвертого рівняння випливає, що $b+d \neq 0$. Тоді $b+c=0$. Підставимо $c = -b$ в перше і четверте рівняння, одержимо: $(a+b)(a-b)(a+d)=2$ і $(d+a)(d+b)(d-b)=3$. Оскільки 2 і 3 – взаємно прості числа, а $(a+d)$ їх спільний дільник, то $a+d=\pm 1$. Отже, $(a+b)(a-b)=\pm 2$. Але числа $a+b$ і $a-b$ мають однакову парність, тому $(a+b)(a-b)$ або непарне, або ділиться на 4. Тоді $(a+b)(a-b)=\pm 2$. Одержане протиріччя показує, що система не має розв'язків в цілих числах

4. У трикутнику ABC $AB=16$ см, $BC=25$ см, $AC=39$ см. Пряма, яка проходить через центр вписаного кола трикутника ABC і середину M сторони BC , перетинає висоту AD цього трикутника в точці P . Знайдіть довжину відрізка AP .

Розв'язання. Нехай I — центр вписаного кола трикутника ABC , K — точка дотику вписаного кола до сторони BC . Легко встановити, що кут ABC тупий. За формулою Герона обчислюємо площу S трикутника ABC , потім за формулою $r = S/p$, де p — півпериметр трикутника ABC , знаходимо радіус вписаного кола: $S = 120$ см², $r = 3$ см. Звідси $AD = 2S/BC = 9,6$ (см). За наслідком теореми Піфагора, $BD = \sqrt{16^2 - 9,6^2} = 12,8$ (см). Як відомо, відрізок дотичної $BK = p - AC = 1$ см. Отже, $KM = BM - BK = 11,5$ (см). Трикутники MKI та MDP подібні, і тому $PD = IK \cdot KM/DM$; $PD = 6,6$ см. Відтак, $AP = 3$ см.

Відповідь: 3 см.



5. У таблиці 3×3 розставили числа 1; 2; ...; 9 (кожне число по разу) таким чином, щоб сума чисел у кожному з чотирьох квадратів 2×2 дорівнювала деякому фіксованому числу S . Знайдіть найбільше можливе значення S .

Розв'язання.

Нехай числа деяким чином розставлено у квадраті 3×3 із дотриманням потрібної умови. Позначимо числа, як показано на рисунку:

p	a	q
b	x	c
r	d	s

Тоді: $p + a + b + x = a + q + x + c = b + x + r + d = x + c + d + s = S$.

Додавши ці чотири суми, дістанемо:

$$4x + 2(a + b + c + d) + p + q + r + s = 4S.$$

Водночас

$$x + a + b + c + d + p + q + r + s = 1 + 2 + \dots + 9 = 45.$$

Віднявши одну рівність від іншої, матимемо

$$3x + (a + b + c + d) = 4S - 45.$$

Таким чином,

$$4S = 45 + 2x + (x + a + b + c + d) \leq 45 + 2 \cdot 9 + (9 + 8 + 7 + 6 + 5) = 98.$$

Звідси $S \leq 24$. При цьому значення $S = 24$ може досягатися: приклад відповідного розташування чисел наведено на рисунку:

4	3	5
8	9	7
1	6	2

Третій етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики

15 січня 2014 року. Розв'язки. 11 клас

1. Розв'яжіть рівняння:

$$(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x + (\sqrt{2-\sqrt{3}})^x = 4$$

Розв'язання:

Неважко бачити, що $\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}} = 1$. Звідки: $\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$;

Зробимо заміну: $a = \sqrt{2+\sqrt{3}}$. Тоді $a^x + \frac{1}{a^x} = 4$. Маємо:

$$a^x = 2 - \sqrt{3}; \quad a^x = 2 + \sqrt{3}. \text{ Звідки: } x=2; \quad x=-2.$$

2. Для додатних чисел a та b доведіть нерівність:

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)^{2014} + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^{2014} \geq 2^{2015}.$$

Розв'язання. З нерівності між середніми, яку ми використовуємо двічі, маємо, що

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{a}{b}\right)^{2014} + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^{2014} &\geq 2\sqrt{\left(1 + \frac{a}{b}\right)^{2014} \left(1 + \frac{b}{a}\right)^{2014}} = 2\left(\left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{a}\right)\right)^{1007} = \\ &= 2\left(2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^{1007} \geq 2(2^2)^{1007} = 2^{2015}. \end{aligned}$$

3. Бічна сторона рівнобічної трапеції дорівнює її меншій основі. Яким має бути кут при більшій основі трапеції, щоб її площа була найбільшою?

Розв'язання. В трапеції ABCD проведемо $BM \perp AD$, $CN \perp AD$, тоді $AD = a + 2AM$. у

$$\triangle AMB (\angle M = 90^\circ): \quad AM = a \cos \alpha; \quad BM = a \sin \alpha.$$

$$S_{\text{тр}} = \frac{BC + AD}{2} \cdot BM = \frac{a + a + 2a \cos \alpha}{2} \cdot a \sin \alpha = a^2 (1 + \cos \alpha) \sin \alpha. \quad \text{Розглянемо}$$

функцію $S_{\text{тр}}(\alpha)$ та дослідимо її на екстремуми.

$$S'_{\text{тр}} = a^2 (2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1); \quad S'_{\text{тр}}(\alpha) = 0; \quad 2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1 = 0; \quad \begin{cases} \cos \alpha = \frac{1}{2}, \\ \cos \alpha = -1. \end{cases}$$

За умовою α – гострий кут. Екстремуму функція $S_{\text{тр}}(\alpha)$ набуває при $\alpha = 60^\circ$ ($\cos \alpha = 0,5$). Розглянемо проміжки зростання (спадання) функції $S_{\text{тр}}(\alpha)$ в залежності від кута α . Найбільшого значення функція $S_{\text{тр}}(\alpha)$ набуває, коли $\alpha = 60^\circ$.

Відповідь. 60° .

4. Оленка вибрала два числа a та b з множини $\{1; 2; 3; \dots; 26\}$. Виявилося, що добуток дорівнює сумі решти 24 чисел з цієї множини. Знайдіть числове значення виразу $|a - b|$.

Розв'язання.

За умовою, $ab = (1+2+3+\dots+26) - a - b = \frac{1+26}{2} \cdot 26 - a - b$.

$a+b+ab = 27 \cdot 13$; $(a+1)(b+1)=352=16 \cdot 22$. Отже, $|a - b| = |16 - 22| = 6$.

5. Знайдіть найменше натуральне число n , для якого в кожній клітинці таблиці розміром $n \times n$ можна записати ціле число з відрізка $[-30; 30]$ так, щоб усі цілі числа цього відрізка виявилися записаними, причому ані в жодному рядку, ані в жодному стовпці не знайшлося пари чисел з від'ємним добутком.

Розв'язання.

Для $n=11$ приклад легко наводиться: лівий верхній прямокутник розміром 5×6 заповнюється числами $1, 2, \dots, 30$ у довільному порядку, правий нижній прямокутник розміром 6×5 заповнюється числами $-1, -2, -3, \dots, -30$ у довільному порядку, і до решти клітинок записуються нулі.

Доведемо, що для $n \leq 10$ це неможливо. Якщо додатні цілі числа з відрізка $[-30; 30]$ розташовані в k стовпцях і m рядках, то всього клітинок з додатними числами буде не більше за km . Зрозуміло, що клітинок з від'ємними числами – не більше за $(n-k)(n-m)$. Оскільки

$$\sqrt{k(n-k)} \leq \frac{k + (n-k)}{2} = \frac{n}{2},$$

$$\sqrt{m(n-m)} \leq \frac{m + (n-m)}{2} = \frac{n}{2},$$

$$km(n-k)(n-m) \leq \frac{n^4}{16},$$

то хоча б одне з чисел $km, (n-k)(n-m)$ не перевищує $\frac{n^2}{4}$. Але якщо $n \leq 10$, то

$\frac{n^2}{4} < 30$, і тому записати принаймні один раз кожне ціле число з відрізка

$[-30; 30]$ ми не зможемо. Відповідь. $n=11$.