

**8 клас**  
**Розв'язки**

- 1) Два літаки, які рухаються горизонтально з надзвуковою швидкістю прямолінійно зустрічними курсами, перебуваючи в одній вертикальній площині на різних висотах (мал. 1). В деякий момент часу літак 1 виявився точно над літаком 2. Через  $t_1 = 1,8$  с після цього другий пілот почув звук від першого літака. В який момент часу  $t_2$  перший пілот почув звук від другого літака? Швидкість звуку в повітрі  $u = 324$  м/с, швидкості літаків постійні та дорівнюють  $v_1 = 405$  м/с,  $v_2 = 351$  м/с.

**Розв'язок**

На рис.1 показано положення літаків на момент отримання звукового сигналу літаком, що знаходиться в т.А від іншого літака, який в цю мить знаходиться в т.В. Але літак в т.А отримає звук, який прийшов з т.С. Час  $t_x$  – затрачений на рух літака з т.С до т.В. Трикутник АВС є прямокутним, тому, що АВ є дотичною до кола, що показане пунктирною лінією, та є місцем точок, до яких дійшов звук з т.С через час  $t_x$ .

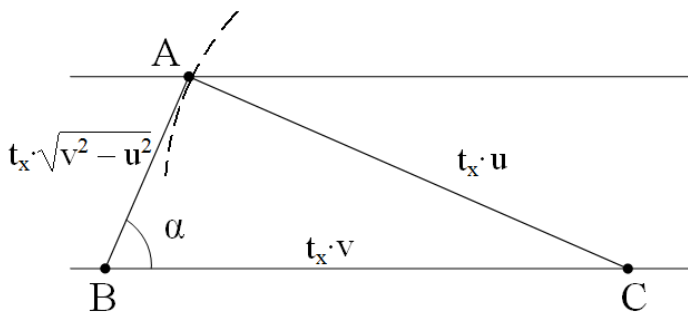


рис.1

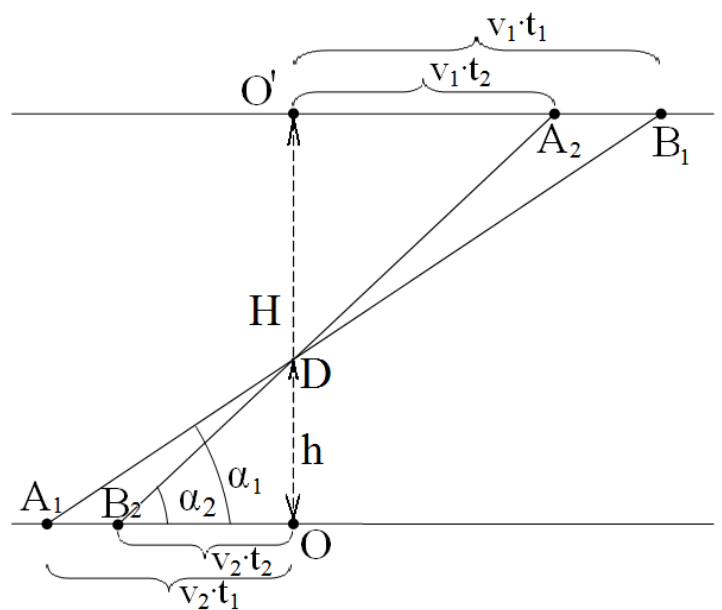


рис.2

З теореми Піфагора відстань  $AB = t_x \cdot \sqrt{v^2 - u^2}$ .

На рис.2. показано положення літаків на час, коли літак  $A_1$  ( $A_2$ ) почув звук від літака  $B_1$  ( $B_2$ ).

Можна побачити, що  $h = \text{tg}\alpha_2 \cdot v_2 \cdot t_2 = \text{tg}\alpha_1 \cdot v_2 \cdot t_1$ , звідки

$$t_2 = t_1 \cdot \frac{\text{tg}\alpha_1}{\text{tg}\alpha_2}.$$

Таке саме співвідношення можливе і при використанні висоти  $H$  замість  $h$ , тому, що перетин  $A_1B_1$ ,  $A_2B_2$  та  $OO'$ , за рахунок однакового співвідношення сторін трикутників відбувається в одній точці.

З рис.1  $\text{tg}\alpha = \frac{u}{\sqrt{v^2 - u^2}}$ . Тоді  $t_2 = t_1 \cdot \frac{\sqrt{v_2^2 - u^2}}{\sqrt{v_1^2 - u^2}}$ .

Підставивши значення швидкостей, маємо

$$t_2 = t_1 \cdot \frac{\sqrt{v_2^2 - u^2}}{\sqrt{v_1^2 - u^2}} = 1 \text{ с.}$$

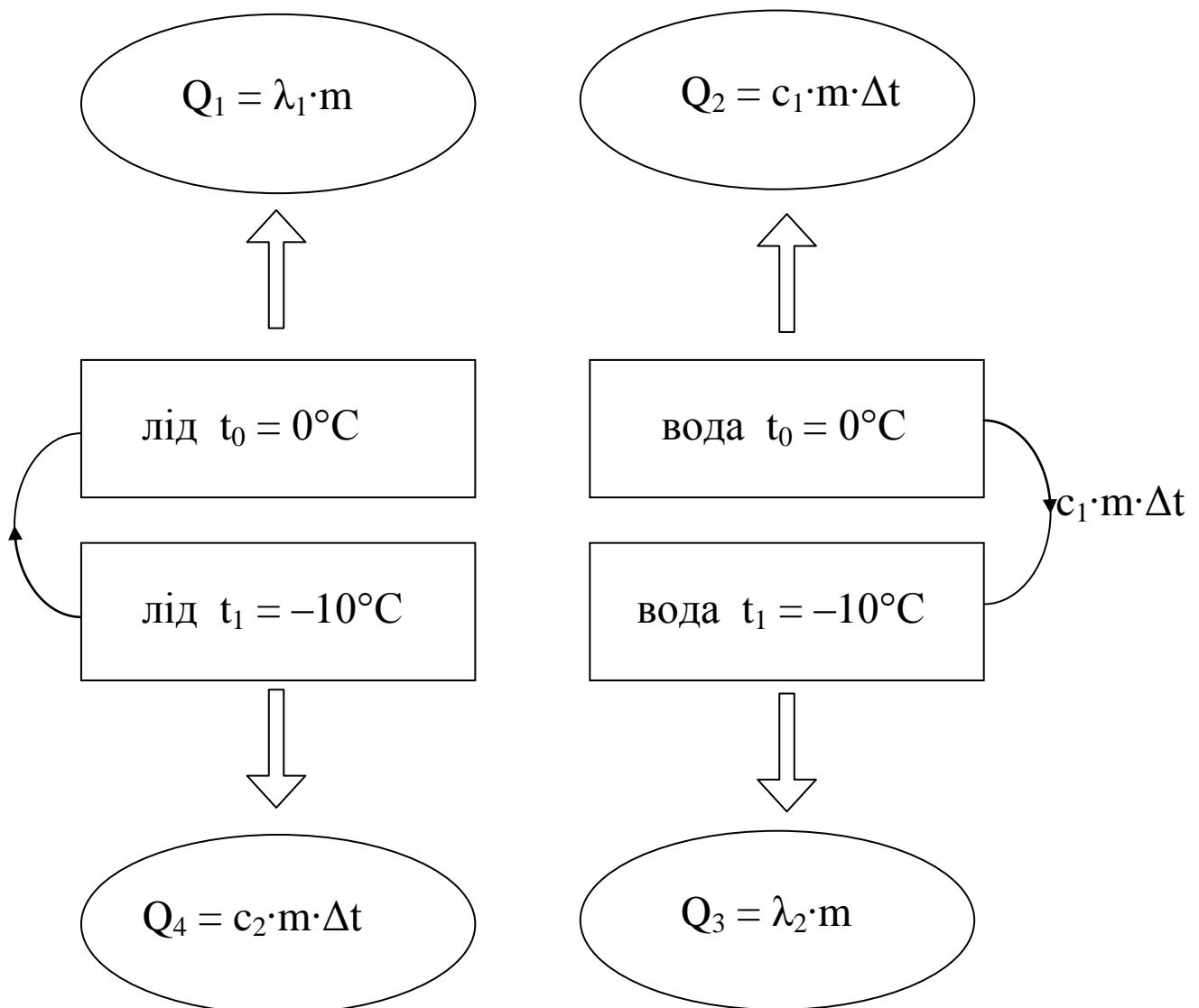
**Відповідь:** Перший почув звук від другого через 1 с після зустрічі.

**8 клас**  
**Розв'язки**

- 4) Воду можна охолодити без перетворення в лід нижче температури  $t_0 = 0^\circ\text{C}$ . В залежності від зовнішнього тиску процес кристалізації води може початися при певній температурі  $t < t_0$ . Лід, що утворюється при цьому, відрізняється за своїми фізичними властивостями від звичайного льоду, одержаного при температурі  $0^\circ\text{C}$ . Визначити, чому дорівнює питома теплота плавлення льоду  $\lambda_2$  при температурі  $t_1 = -10^\circ\text{C}$ . Прийняти в інтервалі температур від  $-10^\circ\text{C}$  до  $0^\circ\text{C}$  питому теплоємність води рівною  $c_1 = 4,17 \cdot 10^3 \cdot \text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{град})$ , питому теплоємність льоду  $c_2 = 2,17 \cdot 10^3 \cdot \text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{град})$ . Питома теплота плавлення льоду при температурі  $0^\circ\text{C}$  дорівнює  $\lambda_1 = 3,32 \cdot 10^5 \cdot \text{Дж}/\text{кг}$

**Розв'язок**

Розв'язання задачі пояснює схема:



Запишемо рівняння теплового балансу:

$$\lambda_1 \cdot m + c_2 \cdot m \cdot \Delta t = \lambda_2 \cdot m + c_1 \cdot m \cdot \Delta t$$

Звідси випливає, що

$$\lambda_2 = \lambda_1 - (c_1 - c_2) \cdot \Delta t$$

$$\lambda_2 = 3,12 \cdot 10^5 \cdot \text{Дж}/\text{кг}$$

**ЗАДАЧА 1 (8 клас).** З одинадцяти послідовно з'єднаних резисторів (рис.1) опорами від 1 Ом до 11 Ом ( $r_k = k$  Ом) шляхом з'єднання двох крайніх клем 0 утворено замкнуте коло. Клеми зберегли нумерацію від 0 до 10. До яких клем треба приєднати вхідний та вихідний провідники, що проводять струм, щоб опір між ними був найбільшим? Чому цей опір дорівнює?

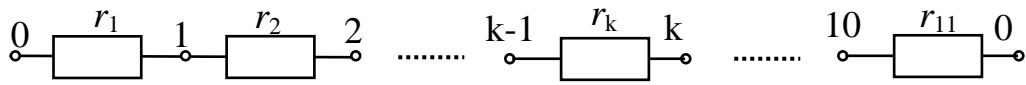


Рис. 1

**РОЗВ'ЯЗАННЯ.** При приєднанні провідників до клем кола це коло утворює паралельне з'єднання двох зведених резисторів опорами  $R_1$  і  $R_2$ , причому  $R_1 + R_2 = r = \text{const} = \sum r_k =$

$$= 1 + 2 + \dots + 11 = 66 \text{ Ом.}$$

Опір між клемми визначається формулою

$$R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_1 \cdot R_2}{r}.$$

Так як  $r = \text{const}$ , то, щоб опір  $R$  був максимальним, має бути максимальним добуток  $R_1 R_2$ .  $R_1 R_2 = R_1(r - R_1) = rR_1 - R_1^2 = \frac{r^2}{4} - \left(\frac{r}{2} - R_1\right)^2$ . Очевидно, добуток буде максимальним, коли  $R_1 = \frac{r}{2}$ . Тому  $R_1 = R_2 = \frac{r}{2} = 33$  Ом. При цьому  $R = \frac{r}{4} = 16.5$  Ом.

Залишилося встановити, чи можна реалізувати умову  $R_1 = R_2 = 33$  Ом. Щоб скоротити процес перебору, почнемо з найбільшого опорів ( $r_{11} = 11$  Ом) і підемо в бік поступового зменшення опорів:  $r_{11} + r_{10} + r_9 = 30$  Ом. Якщо піти в інший бік і взяти ще опорів  $r_1$  і  $r_2$ , одержимо 33 Ом. Отже, провідники треба приєднати до клем 2 і 8 (рис.2).

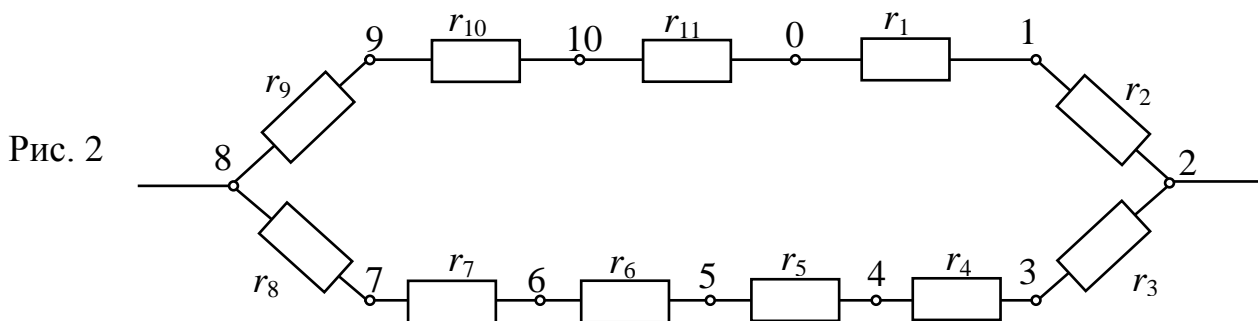
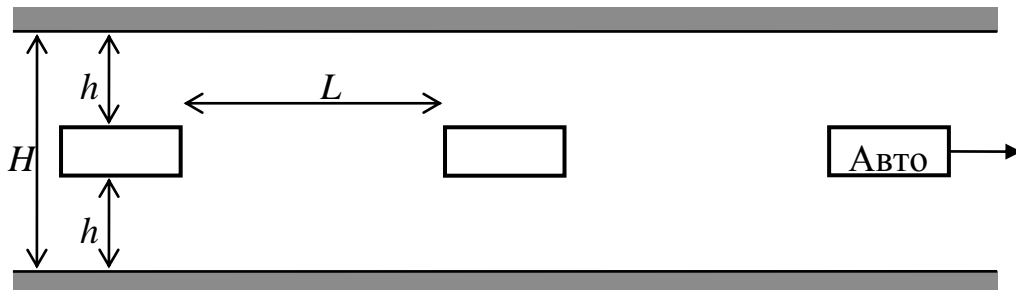
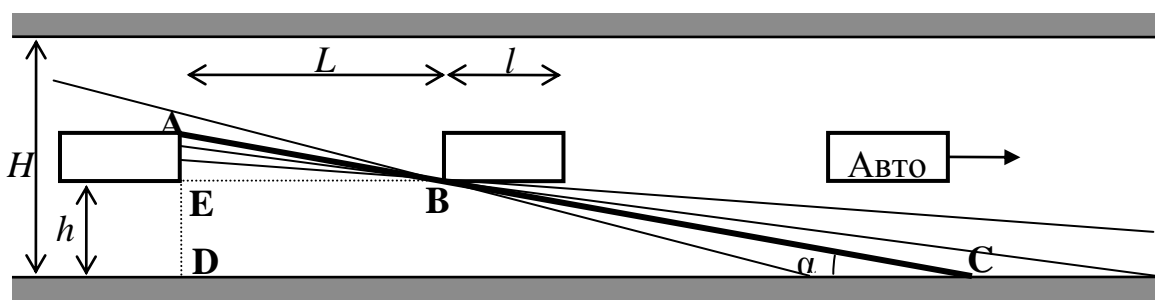


Рис. 2

**Труба.** Під час шоу тонку пряму і достатньо легку трубу треба перенести на іншу сторону дороги, якою ідуть бутафорські автомобілі (перекидати трубу через автомобілі забороняється). Перемагає та команда, яка перенесе трубу найбільшої довжини, не потрапивши в аварію. Якою може бути максимальна довжина труби? Як повинні рухатись члени команди, щоб перемогти? Швидкість руху автомобілів є сталою  $u \approx 12 \text{ м/с}$ , максимальна швидкість, з якою з трубою можуть узгоджено бігти члени команди,  $v \approx 3 \text{ м/с}$ .  $H \approx 9 \text{ м}$ ,  $h \approx 3,6 \text{ м}$ ,  $L \approx 8 \text{ м}$ .



**Труба. Розв'язок.** Якщо перейти в систему відліку, пов'язану з автомобілями, то вони будуть нерухомі, узбіччя дороги рухатиметься повз них у протилежному напрямку зі швидкістю  $u \approx 12 \text{ м/с}$ , а гравці з трубою пересуватимуться з відносною швидкістю  $v$ , яку можна знайти із закону додавання швидкостей  $\vec{v} \approx \vec{v} \oplus \vec{u}$ . Як видно з рисунку, найбільша довжина труби  $S$ , що може «пролізти» між автомобілями, дорівнює відрізку  $AC$ , який неважко знайти із подібності трикутників  $ACD$  і  $ABE$ :



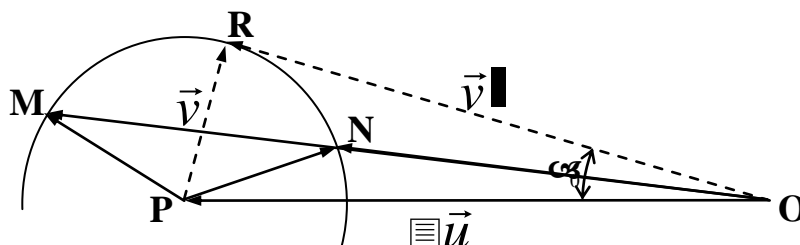
АВЕ:  

$$\frac{S}{\sqrt{L^2 + (H + 2h)^2}}$$

$$S \approx \frac{H + h}{H + 2h} \sqrt{L^2 + (H + 2h)^2}$$

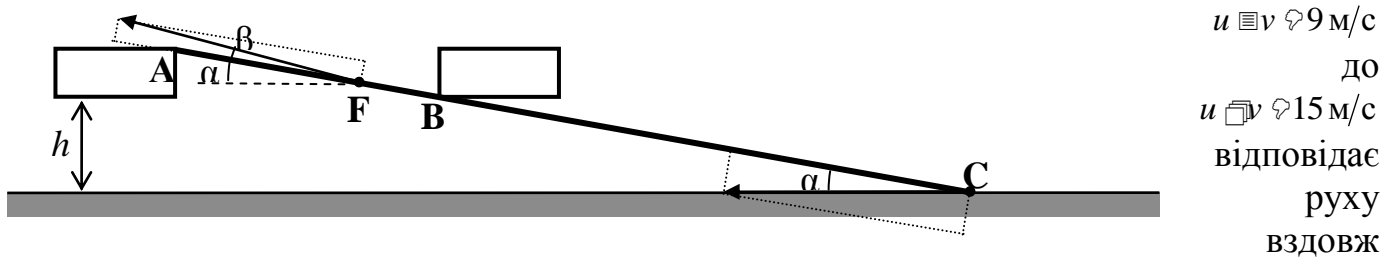
. При цьому кут  $\alpha$ , який утворює  $AC$  з напрямком дороги знаходимо із співвідношення  $\tan \alpha \approx (H + 2h) / L \approx 9 / 40$ ,  $\alpha \approx 12,68^\circ$ .

Залишається відповісти на питання, як повинні при цьому рухатись гравці і чи вистачить у них швидкості? Зазначимо, досягнення положення, зображеного на



що для

рисунку, труба повинна була перед цим повертатися. Відносна швидкість точки С труби безпосередньо перед зображеним на рисунку положенням була спрямована ліворуч вздовж обмеження дороги, відносна швидкість точки А мала дещо менше значення, оскільки проекції швидкостей цих точок на напрямок труби однакові, а перпендикулярні відносяться як АВ/ВС (АВ<ВС). Але, коли мова йде про відносну швидкість, її величина пов'язана з напрямком руху, більш того, не всі напрямки руху можливі. Відносна швидкість  $\vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$  для довільних напрямків  $\vec{v}$  має зручне графічне відображення (див. Рис.2). Найбільший кут  $\varphi$   $\angle POR$ , за якого можливий рух (з відносною швидкістю  $v = \sqrt{u^2 + v^2} \approx 3\sqrt{15} \text{ м/с} \approx 11,6 \text{ м/с}$ ), знаходимо з прямокутного трикутника OPR, де  $\sin \varphi = v/u \approx 0,25$ :  $\varphi \approx 14,48^\circ$  ( $\varphi < \alpha$ , перебігти дорогу можливо). Для менших кутів відносна швидкість може знаходитись в інтервалі, який на рисунку відповідає відстаням між ON і OM (найбільший інтервал відносних швидкостей від



напрямку дороги). Таким чином, траєкторія відносного руху гравця не може відхилитися від напрямку «ліворуч» більше ніж на кут  $\varphi$ , при цьому швидкість його руху залежить від напрямку руху. Визначимо, чи є на трубі точка (позначимо F), яка у найбільш критичний момент рухається під кутом  $\varphi$  (див. Рис.3). Припустимо, що це так. Тоді кут, який утворює швидкість точки F з напрямком труби,  $\varphi = \varphi \approx 1,8^\circ$ . Оскільки проекції швидкостей точок F і С на напрямок труби однакові  $v_F \cos \varphi = v_C \cos \alpha$ , а проекції на перпендикулярний напрямку відносяться як відстані FB/BC, маємо  $\frac{FB}{BC} = \frac{v_F \sin \varphi}{v_C \sin \alpha}$ , звідки знаходимо, що  $FB \approx BC \frac{\tan \beta}{\tan \alpha} \approx 0,14 BC \approx 2,3 \text{ м}$ , що значно менше відстані АВ. Отже перенести трубу такої довжини, тримаючи її за кінці, не можна. Але ж за умовою це не вимагається. Гравців треба розмістити поближче до центру труби, але під час змагань вони повинні бігти так, щоб труба поверталася (труба за умовою легка).

Одна з можливих стратегій виглядає так. Два гравці беруть трубу поблизу від центру, розвертають її під кутом  $\alpha$  і біжать так, щоб труба ковзала по задньому куту автомобіля (точка В), а віддалений кінець труби (точка С) ковзав вздовж обмеження дороги. Коли труба досягає критичного положення, можна рухатись з відносною швидкістю спрямованою вздовж труби (виникає питання, як гравці протиснуться між трубою і автомобілем), а можна ще трохи розвернувшись (кут  $\varphi$  це дозволяє) і змінивши напрямок руху чисто пробігти між автомобілями і досягти симетричного критичного положення з іншого боку дороги. І далі все повторити. Звісно це виглядає досить складним, але, як відомо, тренування, особливо якщо вони підкріплені мріями про вагомий призовий фонд, допомагають досягти успіху.

Наприклад, у системі відліку «дорога» гравці, взявшись за середину труби, починають бігти вздовж дуги кола радіусом  $S/2$  з центром у нерухомій точці С на узбіччі, ковзаючи трубою у точці В автомобіля (див. Рис.4). У критичний момент, їх

швидкість  $v_1$  знайдемо з умови проковзування в точці В:  $u \sin \alpha = v_1 \frac{BC}{S/2}$ .

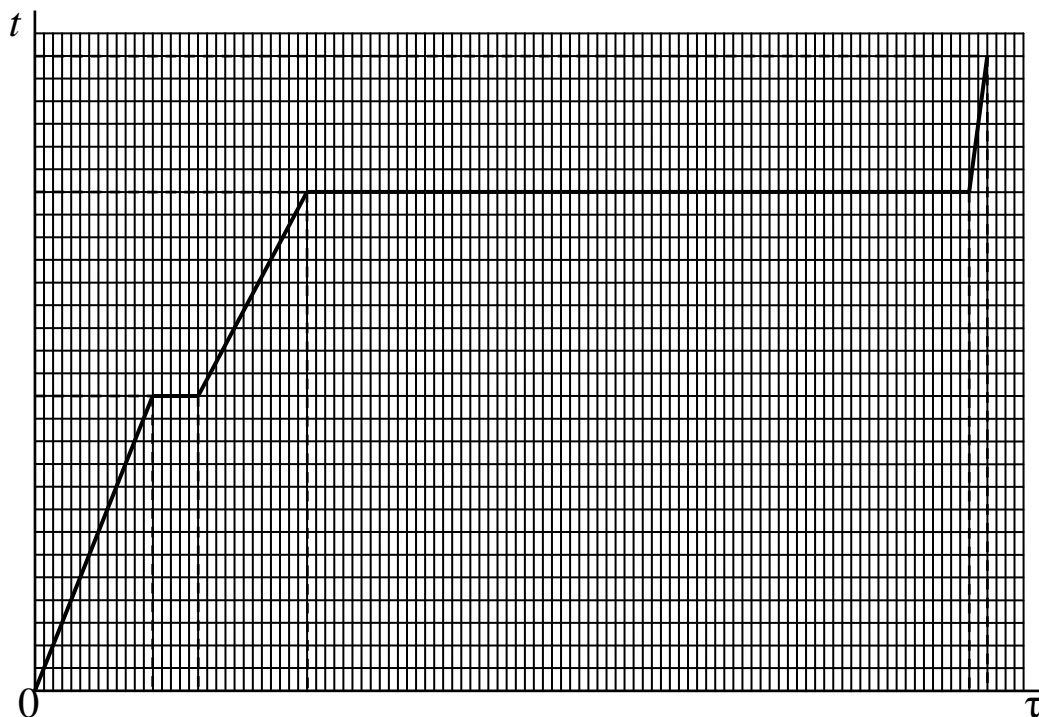
$v_1 = \frac{3}{4} u \sin \alpha = \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{41} \cdot 2 \text{ м/с} = 2 \text{ м/с}$  - як бачимо ніяких проблем бігти з такою швидкістю у гравців не буде. Далі, якщо вони продовжуватимуть поступально бігти у тому ж напрямку (перпендикулярно до труби) з середньою швидкістю  $v_2 = u \sin \alpha = \frac{108}{41} \text{ м/с} = 2,634 \text{ м/с}$ , труба весь час буде проковзувати між двома автомобілями (відносна швидкість спрямована вздовж труби) аж до критичного положення з іншого боку дороги, коли точка А труби доткнеться до узбіччя. Після чого гравці роблять ще одну пробіжку вздовж кола з центром у точці А.

*Игорь, как видишь, задача, оказывается, не простая. Однако весь предварительный анализ можно было бы сократить, оставив резюме как двигаться и почему это возможно. Формально задачу можно давать даже 8-му классу, и может какой-нибудь сообразительный малыш сразу найдет правильный ответ, не вдаваясь ни в какие системы отсчета. Достаточно главной идеи – чтобы просунуть, надо касаться.*

*Предвижу несколько не точных вариантов ответов:*

- 1.  $S=0,8$  м – труба параллельно улице, игроки бегут перпендикулярно улице.*
  - 2. Труба параллельно улице, игроки бегут под углом  $\alpha$ .*
  - 3. Труба под углом, но игроки бегут перпендикулярно улице.*
  - 4. Труба под углом, игроки бегут под углом  $\alpha$ . Движение трубы поступательное.*
- Думаю, всегда можно распределить  $\frac{3}{4}$  баллов за такую задачу среди не точных ответов.*

**Композит.** Останнім часом все більшого поширення набувають композитні матеріали. Одне із застосувань композитів – це тепловий захист космічних апаратів, які з великою швидкістю входять в атмосферу Землі і сильно розігріваються. Запропонований для теплового захисту композит являє пористу кераміку, заповнену металом. Пори з'єднані між собою і мають виходи. Під час випробувань зразку композиту передавали постійну теплову потужність, починаючи з температури  $0^{\circ}\text{C}$ . За графіком залежності температури  $t$  від часу  $\tau$  визначте, яким саме металом була наповнена кераміка, а також знайдіть його питому теплоємність у рідкому стані, температуру кипіння і питому теплоту випаровування.



Довідкові дані:

	Питома теплоємність $c$ , кДж/(кг·К)	Температура плавлення, $^{\circ}\text{C}$ .	Питома теплота плавлення $\lambda$ , кДж/кг
Алюміній	0,9	660	380
Берилій	1,9	1300	1360
Літій	4,4	182	630
Магній	1,0	650	375

**Композит. Розв'язок.** Позначимо через  $x$  величину масштабного відрізка часу  $\tau$ , а через  $y$  величину масштабного відрізка температури  $t$ . Тоді на першому етапі кераміка з металом отримали кількість теплоти  $Q_1 \approx 13xP$  і нагрілися до температури плавлення металу  $t_n \approx 13y$  ( $y$   $^{\circ}\text{C}$ ). На другому етапі на розплавлення металу пішло  $Q_2 \approx 5xP$  теплоти. На третьому розплавлений метал разом з керамікою нагрівся до своєї температури кипіння  $t_k \approx 22y$ , отримавши  $Q_3 \approx 12xP$  теплоти. На четвертому етапі метал випаровувався, забезпечивши велике поглинання теплоти у кількості  $Q_4 \approx 73xP$ . На



завершальному п'ятому етапі кераміка нагрівається вже без металу (вважаємо, що її теплоємність з підвищенням температури суттєво не змінилася). Запишемо рівняння для кожного етапу, позначивши масу і теплоємність кераміки через  $m_k$  і  $c_k$ , а масу металу і його теплоємність у рідкому стані через  $m$  і  $c'$ .

$$\begin{aligned}
 & 3y \cdot c_m \cdot m_k = 13xP, \\
 & m = 5xP, \\
 & y \cdot c_k \cdot m_k = 12xP, \\
 & nr = 73xP, \\
 & 5c_k m_k = 2xP.
 \end{aligned}$$

Виразимо з останнього рівняння  $xP$  і підставимо в інші:

$$\begin{aligned}
 & m = 2c_k m_k, \\
 & n = 15y c_k m_k, \\
 & y = 3c_k m_k, \\
 & nr = 219y c_k m_k.
 \end{aligned}$$

Тепер з першого рівняння підставимо в інші  $c_k m_k$ :

$$\begin{aligned}
 & 2 = 15y c, \\
 & y = 1,5c, \\
 & nr = 109,5y c.
 \end{aligned}$$

Оскільки  $y = t_n/13$  перше рівняння дозволяє перевірити, яким металом було наповнено кераміку. Згідно графіку і підрахунком  $\frac{t_n c}{3} = \frac{26}{15} \approx 1,73$ . Згідно довідковим даним

$$\left. \frac{t_n c}{3} \right|_{Al} \approx 1,56, \quad \left. \frac{t_n c}{3} \right|_{Be} \approx 1,82, \quad \left. \frac{t_n c}{3} \right|_{Li} \approx 1,27, \quad \left. \frac{t_n c}{3} \right|_{Mg} = \frac{650}{375} = \frac{130}{75} = \frac{26}{15}.$$

Як бачимо, саме дані по магнію співпадають абсолютно точно. Отже, метал в кераміці – магній, його питома теплоємність у рідкому стані  $c = 1,5 \text{ кДж/кг} \cdot \text{K}$ , температура кипіння  $t_k = 22y = \frac{22}{13} t_n \approx 1100 \text{ }^\circ\text{C}$ , питома теплота випаровування  $r = 5475 \text{ кДж/кг}$ .

## 9-й клас.

**Задача 1.** Гімнастка кидає обруч у вертикальній площині вздовж підлоги зі швидкістю  $V_0=4$  м/с, закрутивши його з кутовою швидкістю  $\omega=40$  с<sup>-1</sup> так, що він, торкнувшись підлоги, повернувся назад, не відриваючись від неї. Діаметр обруча  $D=1$  м. Не враховуючи можливих втрат тепла обручем, знайдіть найбільше можливе підвищення його температури внаслідок тертя після повернення, якщо питома теплоємність матеріалу обруча  $C=880$  Дж/(кг·К).

**Розв'язок.** Величина підвищення температури обруча може бути визначена як різниця його повної (поступальної і обертальної) початкової та кінцевої енергій, віднесена до повної теплоємності:  $\Delta T = \frac{E_{\text{поч}} - E_{\text{кін}}}{Cm}$ , де  $m$  - невідома маса обруча.

Застосуємо вираз для енергії поступального руху у вигляді  $\frac{mV^2}{2}$  обертального –  $\frac{m\omega^2 R^2}{2}$ , отже  $\Delta T = \frac{1}{C} \left[ \frac{V_0^2}{2} - \frac{\omega^2 R^2}{2} \right] = \frac{V_2^2}{2C} - \frac{\omega_2^2 R^2}{2C}$ , де позначено  $R = \frac{D}{2}$ ;  $V_2$  та  $\omega_2$  -

поступальна та кутова швидкості обруча після зникнення проковзування, тобто  $V_2 = \omega_2 R$ .

Рівняння 2-го закону Ньютона:

- для поступального руху  $F_{\text{тр}} = m \frac{dV}{dt}$ , де  $F_{\text{тр}} = kmg$  - сила тертя ковзання;

- для обертального руху:  $kmg = mR^2 \frac{d\omega}{dt}$ , де  $d\omega$  - зміна кутової швидкості за час  $t$ .

Розглядаючи окремо рух з моменту падіння до повної зупинки у найвіддаленішій від гімнастки точці, з цих рівнянь отримаємо:  $V_0 = kg\tau$  та  $\omega_1 = \omega = \frac{kg\tau_1}{R}$ ,

де  $\omega_1$  - швидкість обертання при зупинці поступального руху.

Позбуваючись часу  $\tau_1$ :  $\omega_1 = \omega = \frac{V_0}{R}$ .

Аналогічно для руху обруча до гімнастки від най віддаленої точки до моменту припинення проковзування, тобто зрівняння поступальної швидкості центра мас і лінійної швидкості точок обруча:

$$kmg = m \frac{V_2}{\tau_2};$$

$$kmg = mR^2 \frac{\omega_2 - \omega_1}{\tau_2}.$$

Звідки отримуємо:  $V_2 \approx kgT_2$  і  $\omega_2 \approx \omega_1 \approx \frac{kgT_2}{R} \approx \omega \approx \frac{V_0}{R} \approx \omega_2$ , або  $\omega_2 \approx \frac{1}{2} \frac{V_0}{R}$ ;

$$V_2 \approx \frac{1}{2} \omega R \approx V_0.$$

Підставляючи отримані  $V_2$  або  $\omega_2$  в рівняння для  $T$  отримаємо остаточну відповідь:

$$T \approx \frac{1}{C} \frac{V_0^2}{2} \approx \frac{\omega^2 R^2}{2} \approx \frac{\omega R \approx V_0}{4} \approx \frac{1}{4C} \frac{V_0^2}{R} \approx V_0 \omega D \approx \frac{\omega D}{4} \approx 0.16 \text{ К}$$

Відповідь:  $T \approx 0.16 \text{ К}$ .

**ЗАДАЧА 2 (9 клас).** Кожного разу, коли спортивний автомобіль проходить коло замкнутої горизонтальної траси зі сталою швидкістю  $v$ , акселерометр фіксує графік прискорень  $a(t)$  з пропорціями, що зображені на рис.1. Вважаючи, що час проходження траси  $T$  та прискорення  $a$  задані, визначити швидкість  $v$  руху автомобіля, довжину  $S$  траси, її форму та визначальні розміри. Автомобіль рухається по трасі проти годинникової стрілки.

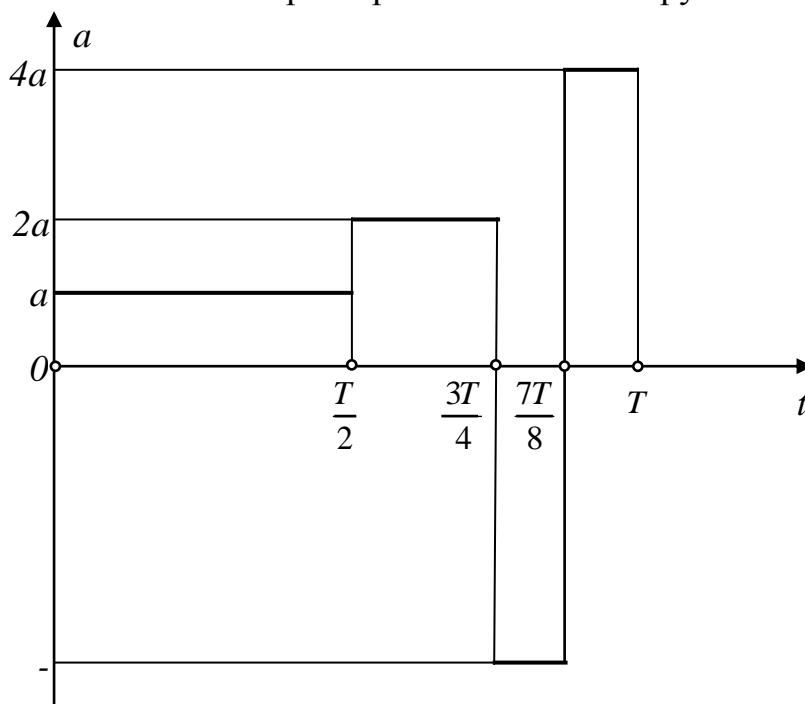


Рис. 1

**РОЗВ'ЯЗАННЯ.** Так як швидкість руху стала, а прискорення не дорівнює нулю, робимо висновок, що мова йде про нормальну складову прискорення. Поки нормальне прискорення стало, відповідна ділянка траси є частиною кола радіуса  $R_i \propto \frac{v^2}{a_i}$ . За допомогою графіка легко встановити, що  $R_1 = 2R_2 = 4R_3 = 4R_4$ .

Довжина кожної ділянки  $S_i = \alpha_i R_i = vt_i$ , тому відповідно її центральний кут дорівнює:

$$\alpha_1 \propto \frac{vT}{2R_1}; \alpha_2 \propto \frac{v(\frac{3T}{4} \boxminus \frac{T}{2})}{R_2} \propto \frac{vT}{2R_1}; \alpha_3 \propto \frac{v(\frac{7T}{8} \boxminus \frac{3T}{4})}{R_3} \propto \frac{vT}{2R_1}; \alpha_4 \propto \frac{vT}{2R_1}.$$

Отже, за модулем  $\alpha_1 \propto \alpha_2 \propto \alpha_3 \propto \alpha_4 \propto \alpha$ .

Зміна напрямку нормального прискорення (зміна знаку) означає, що на третій ділянці має місце правий поворот.

Враховуючи, що за повне коло автомобіль робить повний оберт на кут  $2\pi$  і при цьому на третій ділянці повертається в протилежному напрямку, одержимо:

$$\alpha_1 \boxminus \alpha_2 \boxplus \alpha_3 \boxminus \alpha_4 \propto 2\pi.$$

Тому  $\alpha_i \propto \pi$ .

Так як  $v \propto \frac{\pi R_1}{t_1}$  та  $a_1 \propto \frac{v^2}{R_1}$ , то

$$R_1 \propto a_1 \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2.$$

Отже, швидкість руху

$$v \propto \frac{a_1 T}{2\pi}.$$

Довжина траси  $S \propto vT \propto \frac{a_1 T^2}{2\pi}$ .

Профіль траси складається з чотирьох півкіл, що зображені на рис. 2.

$$A_0 A_1 = 2R_1; A_1 A_2 = R_1; A_2 A_3 = A_3 A_0 = 0.5 R_1.$$

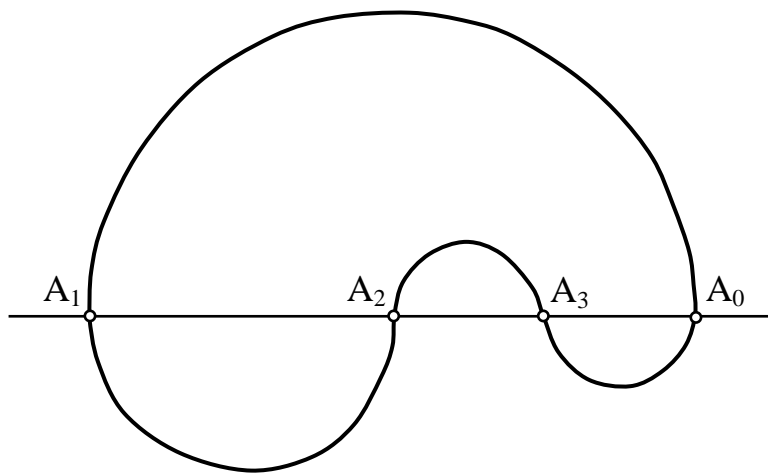
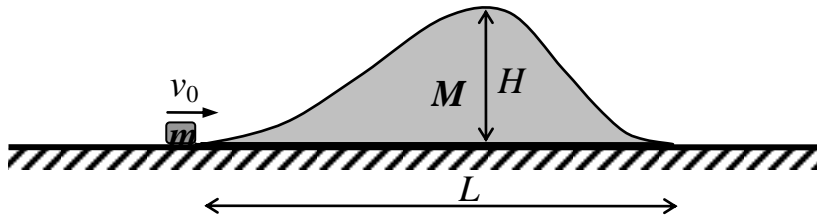


Рис. 2

**Слизька гірка.** Гірка масою  $M$  висотою  $H$  і довжиною  $L$  може переміщатися вздовж гладкої горизонтальної поверхні. На гірку, яка перебуває у стані спокою, наїжджає з початковою швидкістю  $v_0$  тіло масою  $m$  (див. Рис.) і через деякий час  $t$  з'їжджає з гірки на горизонтальну поверхню. Визначити шлях, який пройде гірка за цей час. Силами тертя, опором повітря знехтувати. Якою буде відповідь, якщо сили тертя врахувати, але вважати, що під час руху з тілом гірка не зупиняється, а коефіцієнт тертя  $\mu$  між нею і поверхнею дуже малий?



**Слизька гірка. Розв'язок.** Тіло може з'їхати з гірки назад, а може переїхати гірку і з'їхати з іншої сторони (спереду). Визначимо, за якої умови це відбувається.

Якщо швидкість поступово збільшувати, тіло буде підніматися на все більшу висоту. Особливий випадок, коли тіло піднімається на верхівку гірки з нульовою відносно неї швидкістю. Розглянемо цей граничний випадок відносно нерухомої системи відліку з точки зору законів збереження

$$\begin{aligned} \star mv_0 &= \star (m \square M) v, \\ \star \frac{mv_0^2}{2} &= \star \frac{(m \square M) v^2}{2} \square m g H. \end{aligned}$$

Знаходимо, якщо  $v_0 < \sqrt{2 \frac{m}{m \square M} g h}$  тіло не зможе піднятися на верхівку і з'їде назад через початкову

точку, якщо ж  $v_0 > \sqrt{2 \frac{m}{m \square M} g h}$  - тіло буде мати, проходячи верхівку, більшу від гірки швидкість і

з'їде попереду неї. Звісно, швидкість навантаженої тілом гірки буде змінюватись в залежності від горизонтальної проекції сили, з якою тіло під час відносного руху тисне на гірку. Але, якщо розглянути систему з двох тіл, ця сила виявиться внутрішньою, а ззовні у горизонтальному напрямку ніякі сили на цю систему не діють. Це означає, що центр мас весь час буде рухатись зі сталою

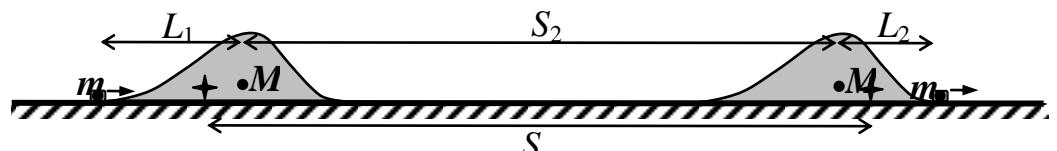
швидкістю  $v_c = \frac{mv_0}{m \square M}$  і за час  $t$  зміститься на відстань  $S = v_c t = \frac{mv_0 t}{m \square M}$ . Тоді у першому випадку,

коли тіло з'їжджає з тієї ж сторони, і центр мас системи відносно гірки набуває попереднього

положення, гірка пройде таку ж відстань, як і центр мас:  $S_1 = S = \frac{mv_0 t}{m \square M}$ .

У другому випадку розглянемо задачу детальніше (див. Рис.). Як бачимо, відстань  $S_2$ , яку пройшла

гірка разом зі своїм центром мас (точка  $M$ ), менша, ніж відстань  $S$ , яку пройшов центр мас



системи тіл гірка + тіло (на рисунку позначено зірочкою  $\star$ ). Різниця цих відстаней складається з

відстані між центрами мас гірки і системи тіл у першому випадку  $\frac{m}{m \square M} L_1$  і у другому випадку

$\frac{m}{m \square M} L_2$ , тобто

$$S_2 \approx S \approx \frac{m}{m+M} L_1 \approx \frac{m}{m+M} L_2 \approx S \approx \frac{m}{m+M} L \approx \frac{m}{m+M} v_0 t \approx L_1.$$

Не важко перекоонатися, що остання формула відповідає граничним випадкам, а саме:  $S_2 \approx 0$ , якщо  $m/M \approx 0$  - гірка не відчуває легенького тіла. Що стосується часу  $t$ , безумовно, цікавим є випадок, коли  $t \approx L/v_0$  і згідно формули  $S_2 \approx 0$ . Формули не бачать профіль нашої гірки і відповідають також на безліч питань, які лежать поза конкретикою задачі. Уявимо, наприклад, гірку з прямим тунелем, скрізь який без затримки проходить тіло. Зрозуміло,  $t \approx L/v_0$  і  $S_2 \approx 0$ . Випадок  $t \approx L/v_0$  також можливий. Якби гірка тягнулася не тільки вгору, але й униз, ковзаючи, наприклад, по рейкам, і в неї був тунель, який спочатку спускався, а потім піднімався, ми б отримали зміщення гірки у зворотному напрямку  $S_2 \approx 0$ .

Нарешті у випадку, коли тіло мов би завмирає на верхівці гірки  $v_0 \approx \sqrt{2 \frac{m}{M} gh}$  можна користуватися обома формулами, оскільки час такого підйому на зображену гірку нескінченно великий. У загальному випадку

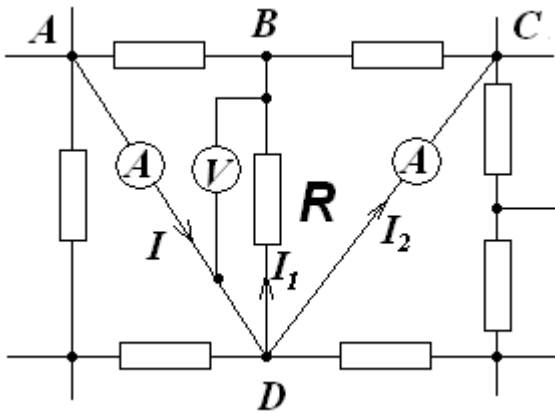
$$S_{\text{гірки}} \approx \frac{mv_0 t}{m+M}, \quad v_0 \approx \sqrt{2 \frac{m}{M} gh},$$

$$\frac{m}{m+M} v_0 t \approx L_1, \quad v_0 \approx \sqrt{2 \frac{m}{M} gh}.$$

Цікаво відзначити, що отримані відстані, які проїде гірка, не залежать від того відривається тіло від гірки у процесі руху чи ні, відсутня сила тертя між гіркою і тілом чи в наявності. Якщо тіло повертається назад  $S_1 \approx \frac{mv_0 t}{m+M}$ , якщо проходить вперед  $S_2 \approx \frac{m}{m+M} v_0 t \approx L_1$ , навіть у тому випадку, коли воно летить і в момент часу  $t$  просто покидає повітряний простір над гіркою.

Нарешті для випадку малих сил тертя між гіркою і поверхнею, зазначимо, що відстань зменшиться, і якщо під час руху не буде зупинок, від отриманих відповідей слід відняти  $\frac{\mu g t^2}{2}$ , Але, звичайно, оцінка куди з'їде тіло повинна бути іншою.

5 (9 клас). Позначимо на схемі такі точки та опори.



Спочатку з'єднаємо точки А і D амперметром, точки С і D – провідником, до точок А і В під'єднаємо джерело струму, а до резистора R – вольтметр.

У цьому випадку через резистор проходить струм  $I$ , через провідник  $I_2$ .

$$I = I_1 + I_2 \quad (1)$$

Поміняємо провідник і амперметр місцями. Коло не зміниться, оскільки їх опори однакові, у цьому випадку матимемо змогу амперметром визначити струм  $I_2$ . З рівності (1) знайдемо:

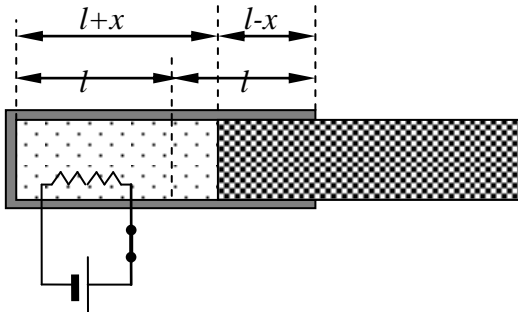
$$I_1 = I - I_2,$$

а шуканий опір буде:  $R \approx \frac{U}{I_1} \approx \frac{U}{I - I_2}$ , де  $U$  – показ вольтметра.



1.

**Розв'язок**



Протягом часу  $t_1 = 41,55$  с температура газу лінійно зростає від  $T_0 = 300$  К до  $T_1 = 320$  К (див. ділянку графіка 1-2). Тому теплоємність газу

$$C_{12} = \frac{Nt_1}{T - T_0} = \frac{10 \cdot 41,55}{20} = \frac{5}{2} R.$$

Так як за умовою задачі газ двоатомний, то одержане значення теплоємності  $C_{12} = C_V$ . Це означає, що протягом часу  $t_1$  після ввімкнення нагрівника поршень утримується силою тертя об стінки посудини, залишаючись нерухомим. Об'єм газу при цьому дорівнює  $V_0$ .

При досягненні температури  $T_1$  тиск газу в посудині зростає до значення

$$p_1 = \frac{F}{S} + p_A, \tag{1}$$

де  $F$  – сила тертя спокою,  $S$  – площа перерізу поршня. Поршень починає рухатись. При цьому об'єм і тиск газу змінюється згідно з рівнянь:

$$V(x) = V_0 + xS = V_0 \left(1 + \frac{x}{l}\right), \quad p(x) = p_A + \frac{F(l-x)}{S} = p_1 - \frac{F}{S} \frac{x}{l}, \tag{2}$$

Виключивши з цих рівнянь величину  $\frac{x}{l}$ , отримуємо лінійну залежність тиску від об'єму:

$$p = p_1 + \frac{F}{S} - \frac{F}{S} \frac{V}{V_0} = (2p_1 - p_A) - (p_1 - p_A) \frac{V}{V_0} \tag{3}$$

Рівняння (3) відповідає процесу, зображеному на графіку ділянкою 2-3-4. В цьому рівнянні невідома величина - тиск  $p_1$ . Визначимо її з рівняння Менделєєва-Клапейрона, стосовно ділянки графіка 2-3-4, де температура є квадратичною функцією від  $x$  (див. рис. у розв'язку):

$$RT(x) = V_0 \left(1 + \frac{x}{l}\right) \left( p_1 - \frac{F}{S} \frac{x}{l} \right). \tag{4}$$

Температура газу досягає максимуму  $T_m = 360$  К (рис 2) при деякому значенні  $\frac{x_m}{l}$ , яке може бути визначене з умови екстремуму функції  $T(x)$  як вершина параболи:

$$\frac{x_m}{l} = \frac{1}{2} \frac{p_A}{F/S} = \frac{p_A}{2(p_1 - p_A)}. \tag{5}$$

Із рівнянь (5) та (4) з урахуванням, що  $p_1 V_0 = RT_1$ , отримуємо квадратне рівняння відносно величини  $\frac{p_A}{p_1}$

$$4 \frac{T_m}{T_1} \approx 1 \frac{p_A}{p_1} \approx 2 \frac{p_A}{p_1}.$$

Розв'язуючи рівняння при підстановці числових значень  $T_1$  та  $T_m$  отримуємо  $p_1 = 2p_A$ . Тоді рівняння (3) процесу, який зображено на графіку ділянкою 2-3-4 матиме вигляд:

$$p \approx p_A \frac{V}{V_0} \quad \text{або} \quad \frac{V}{V_0} \approx 3 \frac{p}{p_A}. \quad (6)$$

Початковий об'єм можна визначити з рівняння стану газу (точка 1) враховуючи, що

$$p_0 \approx p_1 \frac{T_0}{T_1} \approx \frac{15}{8} p_A.$$

Рівняння (6) можна записати у вигляді:

$$\frac{V(3 - V/V_0)}{T} \approx \text{const}.$$

Для визначення залежності теплоємності газу від об'єму на ділянці 2-3-4 використаємо перше начало термодинаміки для ідеального двоатомного газу в диференціальній формі (теплотою, що віддає газ за рахунок третя поршня о стінки посудини, можна знехтувати):

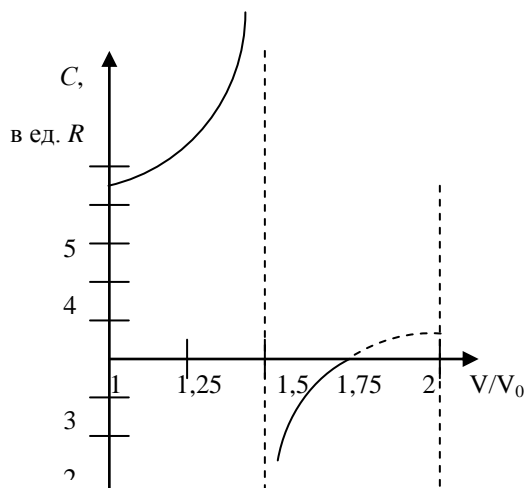
$$\delta Q \approx \frac{5}{2} R dT \approx p dV.$$

Звідки теплоємність газу  $C \approx \frac{5}{2} R \approx p \frac{dV}{dT}$ . Із рівняння стану

$$p_A V (3 - \frac{V}{V_0}) \approx RT$$

отримаємо  $\frac{dV}{dT} \approx \frac{R}{(3 - 2V/V_0)p_A}$ . Так як  $p \approx p_A (3 - V/V_0)$ , то

$$C \approx \frac{5}{2} R \approx \frac{3 - V/V_0}{3 - 2V/V_0} R.$$



На графіку схематично зображено залежність  $C=f(V/V_0)$ . Як бачимо, при  $1,5 < V/V_0 < 1,75$  теплоємність від'ємна.

**ЗАДАЧА 2 (10 клас).** Чотири однорідні стержні однакової маси  $m$  та однакової довжини  $l$ , що з'єднані між собою та зі стійкою шарнірно, підвішені так, як показано на рис.1. Відстань між шарнірами  $A$  і  $E$  дорівнює  $2a$ . При цьому  $2a \neq l(1 \pm \sqrt{3})$ . Шарніри  $B$  і  $D$  з'єднані ниткою, довжина якої  $l$ . Нитку миттєво перерізають. На скільки зміститься шарнір  $C$  при переході системи із початкового в положення стійкої рівноваги? Яка кількість теплоти виділиться за час, коли система набуде стійкої рівноваги?

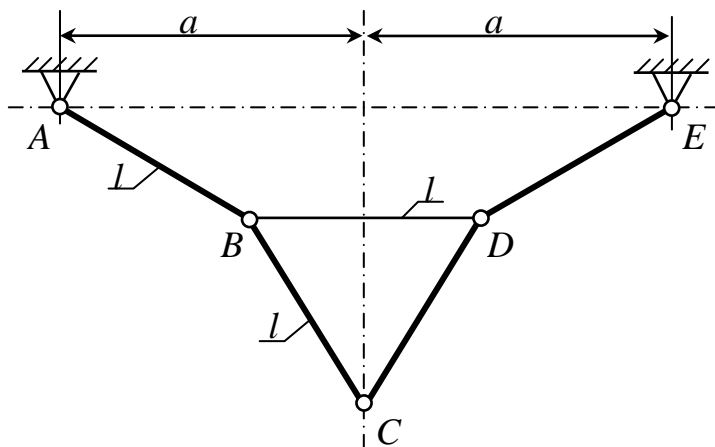


Рис.1

**РОЗВ'ЯЗАННЯ.** Згідно даних задачі очевидно, що в момент початку руху системи  $\alpha_0 \neq 60^\circ$ ,  $\beta_0 \neq 30^\circ$  (рис.2).

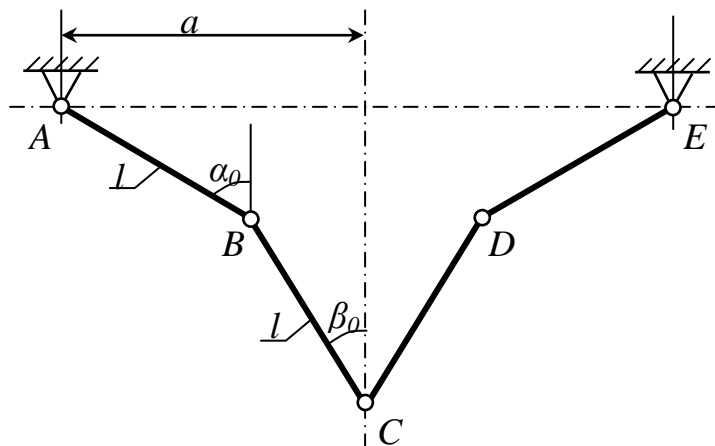


Рис.2

З часом система набуде стану стійкої рівноваги (рис. 3). Сила  $F$ , що діє з боку правої частини системи на ліву, в силу симетрії системи направлена так, як показано на рис. 3.

Запишемо умову рівноваги стержня BC відносно точки B:

$$Fl \cos \beta \approx mg \frac{l}{2} \sin \beta \neq 0.$$

Звідси

$$F \approx \frac{mg \sin \beta}{2 \cos \beta}. \quad (1)$$

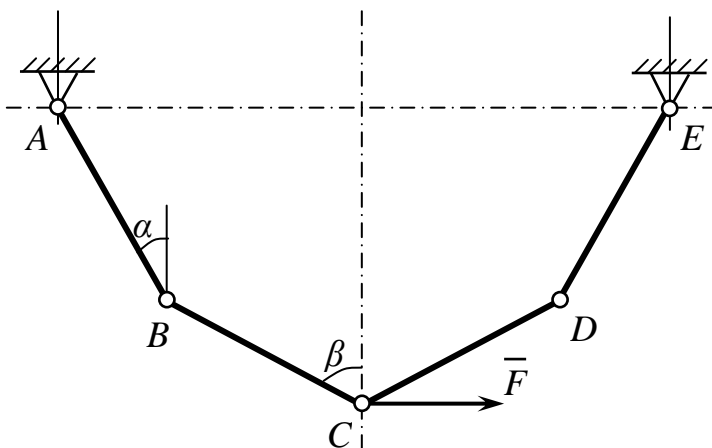


Рис.3

Тепер запишемо умову рівноваги лівої частини системи відносно точки А:

$$F(l \cos \alpha - l \cos \beta) - mg \frac{l}{2} \sin \alpha - mg(l \sin \alpha - \frac{l}{2} \sin \beta) = 0.$$

Звідси

$$F = \frac{mg}{2} \frac{3 \sin \alpha - \sin \beta}{\cos \alpha - \cos \beta}. \quad (2)$$

Прирівняємо (1) і (2):

$$\frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{3 \sin \alpha - \sin \beta}{\cos \alpha - \cos \beta}.$$

Звідси

$$\operatorname{tg} \beta = 3 \operatorname{tg} \alpha. \quad (3)$$

Шарнір С переміщується тільки по вертикалі, тому

$$l \sin \alpha - l \sin \beta = a = l \frac{1 - \sqrt{3}}{2},$$

або

$$\sin \alpha - \sin \beta = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}. \quad (4)$$

Дослідимо систему рівнянь (3) та (4). Рівнянню (4) відповідають ті значення кутів  $\alpha$  і  $\beta$ , при яких точка С знаходиться на осі симетрії. Таких пар значень  $\alpha$  і  $\beta$  безліч. Рівняння (3) виділяє з цієї безлічі конкретну пару кутів  $\alpha_1$  та  $\beta_1$ , яка відповідає умові стійкої рівноваги.

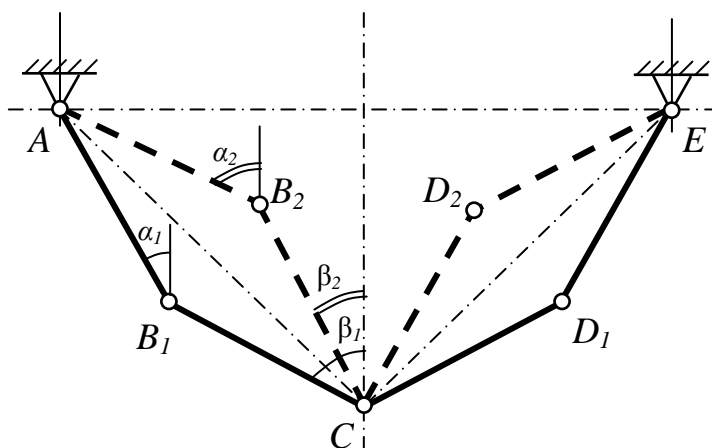


Рис.4

Значення  $\alpha_1$  і  $\beta_1$  можна визначити, розв'язуючи вказану систему чисельними методами.

Але дана механічна система має ще одну особливість. Положенню точки С при стійкій рівновазі системи відповідає ще одна пара кутів  $\alpha_2$  і  $\beta_2$ . Це впливає з, що коли існує трикутник АВ<sub>1</sub>С, то при тих же положеннях шарнірів А і С існує також трикутник АВ<sub>2</sub>С (рис.4).Або це впливає також з рівняння (4), згідно якого  $\alpha$  і  $\beta$  можна поміняти місцями.

Все сказане відповідає заміні  $\alpha_1 = \beta_2$  та  $\beta_1 = \alpha_2$ . Така заміна трансформує умову (3) стійкої рівноваги в умову (5) існування другого розв'язку для заданого положення шарніра С. Одержимо

$$\operatorname{tg}\alpha_2 \neq 3\operatorname{tg}\beta_2. \quad (5)$$

Так як при  $\alpha_2 = \alpha_0 = 60^\circ$  та при  $\beta_2 = \beta_0 = 30^\circ$  умова (5) виконується, то робимо висновок, що початкове положення шарніра С співпадає з його положенням за умови стійкої рівноваги.

Отже, шарнір С після перерізування нитки не зміститься, а за стійкої рівноваги  $\alpha_1 = 30^\circ$ ,  $\beta_2 = 60^\circ$ .

Кількість тепла  $Q$ , що виділиться по закінченні руху системи, дорівнює зменшенню її потенціальної енергії. Враховуючи незмінність положень точок А, С і Е, одержимо

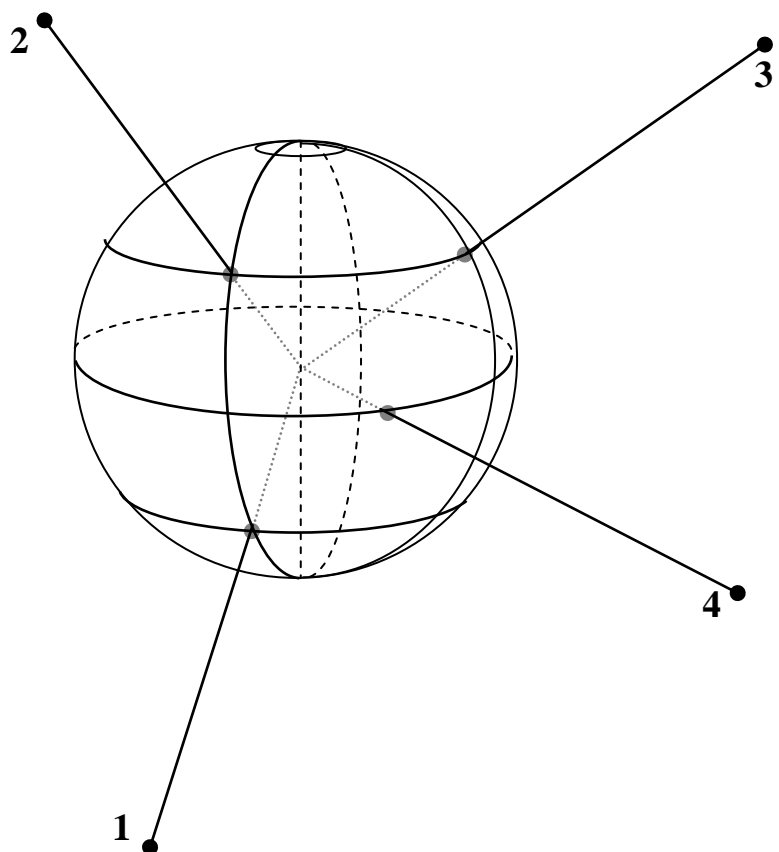
$$Q \neq 2m\left(\frac{l}{2}\cos\alpha_1 \text{ } \text{ } \frac{l}{2}\cos\alpha_0\right) \text{ } \text{ } 2m\left(\frac{l}{2}\cos\beta_0 \text{ } \text{ } \frac{l}{2}\cos\beta_1\right) \neq 2mgl(\cos 30^\circ \text{ } \text{ } \cos 60^\circ) \neq mgl(\sqrt{3} \text{ } \text{ } 1).$$

**Навігація.** Супутникові навігаційні системи дозволяють визначати місцезнаходження і швидкість руху у будь-якій точці земної кулі. Супутник передає сигнал, який містить інформацію про точний час відправлення і координати супутника на цей момент. Приймач реєструє час надходження сигналів від декількох супутників і за затримкою кожного сигналу обчислює відстані до супутників, а разом з цим і своє точне положення. Для цього необхідно приймати сигнали щонайменше від чотирьох супутників, щоб врахувати неточність ходу годинника приймача. *Сьогодні у вільному користуванні тільки американська система GPS (24 супутника на 6 орбітах). Російська ГЛОНАСС (за проектом 24 супутника на 3 орбітах) відновлюється, найближчим часом запрацює система Galileo (27+3 супутника на 3 орбітах). Точність визначення місцеположення системи GPS для звичайних користувачів у середньому 10 - 30 метрів. Для військових – менше метра. Для такої точності враховуються гравітаційні аномалії, стан атмосфери та інше.*

*Знехтуємо цим і будемо вважати, що супутники рухаються по коловим орбітам з радіусами  $r = 20\,000$  км точно і передають сигнали на частоті 1575,42 МГц. Визначити, як часто при цьому супутники перетинають площину Гринвіцького меридіану і у якому діапазоні частот можна очікувати прийом сигналів на поверхні Землі нерухомим спостерігачем?* Визначити значення широти, довготи і висоти над рівнем моря людини на повітряній кулі, мобільний телефон якої отримав такі дані від чотирьох супутників:

№ супу-Т-ника	Час отримання сигналу (годинник приймача)	Час відправлення сигналу за інформацією супутника (точний час)	Широта супутника в момент відправлення сигналу	Довгота супутника в момент відправлення сигналу
1	10 год 12 хв 13,1600 с	10 год 12 хв 13,1121 с	45°00'00'' південна	0°00'00''
2	10 год 12 хв 13,1601 с	10 год 12 хв 13,1122 с	45°00'00'' північна	0°00'00''
3	10 год 12 хв 13,1602 с	10 год 12 хв 13,1123 с	45°00'00'' північна	90°00'00'' східна
4	10 год 12 хв 13,1463 с	10 год 12 хв 13,1120 с	0°00'00''	45°00'00'' східна

Довідкові дані: Земля *робить один оберт навколо осі за 23 години 56 хвилин*, має приплюснуту форму: екваторіальний радіус  $R_e = 6378,15$  км, полярний  $R_p = 6356,80$  км. *Її маса  $5,976 \cdot 10^{21}$  кг, гравітаційна стала  $6,6726 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ с}^{-2} \text{ кг}^{-1}$ .* За визначенням швидкість світла у вакуумі 299792458 м/с.



**Навігація.** Схематично положення супутників (див. Рис.1.) Зазначимо, що різниця часу відправлення і отримання сигналів від перших двох супутників однакова  $\tau_1 \neq \tau_2 \neq 0,0479$  с.

**Розв'язок.** зобразимо Отже

приймач знаходиться в площині екватору. Також однаковою є різниця часу відправлення і отримання сигналів від другого і третього супутників  $t_2 - t_3 = 0,0479$  с. Отже приймач знаходиться в площині меридіану  $45^\circ$ . Дві площини перетинаються вздовж лінії з координатами четвертого супутника. Таким чином, приймач знаходиться безпосередньо під четвертим супутником. Перед тим як розглянути надходження сигналів до приймача від першого і четвертого супутників визначимо кут, який утворюють напрями на ці супутники з центру планети.

Оскільки за умовою кути  $\angle AOB$  і  $\angle BOC$  дорівнюють  $45^\circ$ ,  $AB = BC = R/\sqrt{2}$ , де  $R$  - відстань від центру планети до спостерігача (див. Рис.2). Отже  $AC = R$  і трикутник  $OAC$  є рівностороннім з кутами по  $60^\circ$ . Розглянемо тепер площину цього трикутника (Рис.3). Позначимо через  $t$  розходження у часі між годинником приймача і точним часом  $t$  супутників. Тоді відстань між спостерігачем (точка  $C$ ) і 4-м супутником  $r = R - ct$ , а відстань між спостерігачем і 1-м супутником  $\sqrt{r^2 + R^2} = 2rR \cos 60^\circ - ct$ . Маємо систему з двох рівнянь з двома невідомими  $R$  і  $t$ , звідки знаходимо:

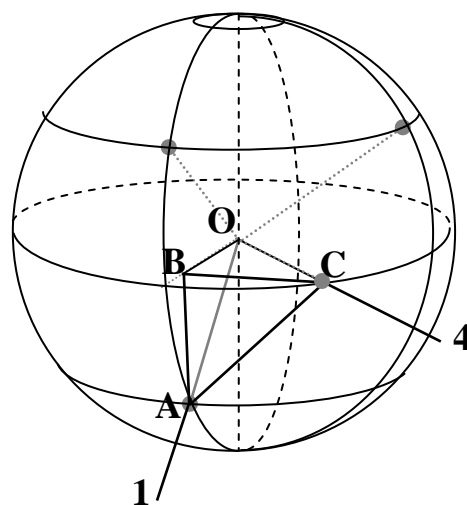


Рис.2.

$$R - ct = \frac{2r \sqrt{r^2 + R^2}}{r \sqrt{2}} - ct \Rightarrow 6383,04 \text{ км}$$

$$R = \frac{r \sqrt{r^2 + R^2}}{c} - ct \Rightarrow 0,0111 \text{ с.}$$

Отже повітряна куля знаходиться у точці з координатами  $0^\circ 00' 00''$  широти (тобто над екватором),  $45^\circ 00' 00''$  східної довготи (неподалік від східного узбережжя Африки), на висоті  $R = R_e = 4 \text{ км } 890 \text{ м}$  над рівнем Індійського океану.

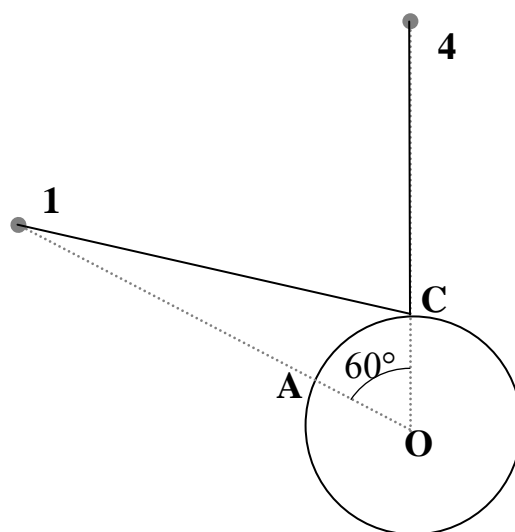


Рис.3.



*Игорь!*

*То, что синим курсивом, можно частично или полностью включить в задачу. Тогда она будет похожа на межнародовскую (думаю, рано или поздно там что-нибудь по GPS дадут). Небольшие нюансы: Земля вращается, орбиты под углами (хотя вот это как раз и не очень существенно). Придется вычислять скорости спутников, периоды их обращения и думать.*

*Наконец, могу переделать основной вариант: задать не радиус орбиты, а период обращения равный, например, в точности полупериоду Земли (в начале работы GPS как раз эта схема и использовалась). Сейчас периоды незначительно отличаются от 12 часов, а радиусы орбит от заданных в условии задачи.*

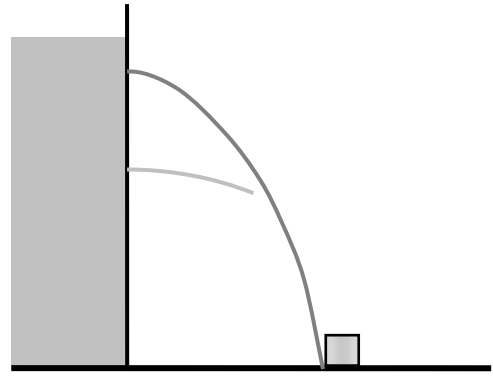
*Наконец, условия избыточны: в основном варианте полярный радиус и сплюснутость Земли не используются, но если заранее выбросить их из условия – получится подсказка об экваторе.*

*Вообщем, звони или пиши, как удобнее.*

*Олег*



**Діжка і стакан.** На підлозі стоїть велика циліндрична діжка заповнена рідиною до рівня  $H=1$  м. Через невеликий отвір, який зроблено у діжці на глибині  $h=10$  см, в горизонтальному напрямку б'є струмінь рідини і розбивається о підлогу поряд із циліндричним стаканом (див. Рис.). Якщо в діжці під першим отвором зробити подібний йому другий отвір, струмені води перетнуться у просторі і зіллються один. Визначити, наскільки точка перетину струменів виявиться нижчою за другий отвір. Уявіть тепер, що другий отвір зроблено на вчетверо більшій глибині, ніж перший, він подібний до нього, але має удвічі меншу площу перерізу  $S_2 \propto S_1/2$ . Чи попаде об'єднаний струмінь до стакану? За якого відношення  $S_1/S_2$  струмінь перелетить стакан? Висота стакану  $h=10$  см, відстань від нього до діжки у 6 разів більша за його діаметр.



B

**Діжка і стакан. Розв'язок.** Як відомо, за ідеальних умов швидкість вильоту води з отвору можна знайти або з рівняння Бернуллі, або з закону збереження енергії (з урахуванням великої площі перерізу діжки  $v \propto \sqrt{2gh}$  - формула Торрічеллі). В реальних умовах швидкість завжди дещо менша і залежить від форми отвору (обговорення цього питання можна знайти, наприклад, у Фейнманівських лекціях з фізики). Тому будемо вважати, що

$$v_1 \propto \alpha \sqrt{2gh_1} \propto \alpha \sqrt{2gh}, \quad v_2 \propto \alpha \sqrt{2gh_2},$$

де  $\alpha$  – деяке менше за одиницю безрозмірне число, однакове для обох отворів внаслідок їх подібності,  $h_2$  - глибина другого отвору. Знайдемо положення точки перетину струменів. У вертикальному напрямку за деякий час  $t$  вода опускається на відстань  $y \propto \frac{gt^2}{2}$ , у горизонтальному – зміщується на відстань  $x \propto vt$ . Таким чином, для системи координат з початком у точці виходу першого струменя і спрямованою вниз віссю ординат, маємо наступні рівняння ліній першого і другого струменів:

$$y_1 \propto \frac{gx_1^2}{2v_1^2}, \quad y_2 \propto h_2 - \frac{gx_2^2}{2v_2^2},$$

де  $h_2 - h_1$  відстань між отворами. Оскільки в точці перетину координати співпадають  $x_1 \propto x_2 \propto x_0$ ,  $y_1 \propto y_2 \propto y_0$ , з урахуванням виразу для швидкостей знаходимо:

$$x_0 \propto 2\alpha \sqrt{h_1 h_2},$$

$$y_0 \propto h_2.$$

Тобто точка перетину струменів нижча від другого отвору на відстань  $y_0 \propto h_2$ . Дивний і красивий результат. Виявляється, точка перетину струменів буде завжди

нижча за нижній отвір на відстань між верхнім отвором і поверхнею води (не зважаючи на те, яка відстань між самими отворами). В нашому випадку це  $h=10$  см. Єдине застереження це сторонні предмети, які можуть завадити перетину струменів. В нашому випадку – поверхня столу, від якої нижній отвір повинен бути віддаленим щонайменше на ті ж самі 10 см.

Перейдемо до другої частини задачі. За умовою другий отвір зроблений на відстані  $h_2 \approx 4h$  від поверхні води. Тоді

$$\begin{aligned} x_0 &\approx 4\alpha h, \\ y_0 &\approx 4h, \\ v_2 &\approx 2\alpha \sqrt{2gh} \approx 2v_1. \end{aligned}$$

Швидкість народженого в точці  $(x_0; y_0)$  нового струменя знайдемо із закону збереження імпульсу. Маса води, яка проходить через отвір площею перерізу  $S$  за одиницю часу, дорівнює

$$q \approx \frac{m}{t} \approx \frac{\rho S v}{t} \approx \rho S v. \text{ Для першого і другого отворів маємо}$$

$$q_1 \approx \rho S_1 v_1 \approx \alpha \rho S_1 \sqrt{2gh}, \quad q_2 \approx \rho S_2 v_2 \approx \alpha \rho S_2 \cdot 2v_1 \approx q_1.$$

Виявляється, змішуються рівні маси рідини обох струменів. Тоді закон збереження імпульсу

зведеться до визначення середньоарифметичних швидкостей. У горизонтальному напрямку швидкості струменів залишаються незмінними, отже після з'єднання  $v_x \approx \frac{v_1 + v_2}{2} \approx \frac{3}{2} v_1$ . У вертикальному напрямку  $v_y \approx \frac{v_{1y} + v_{2y}}{2} \approx \frac{1}{2} (\sqrt{2gy_0} + \sqrt{2g(y_0 + h)}) \approx \frac{3}{2} \sqrt{2gh}$ .

Для того, щоб знайти відстань від діжки, на якій опиниться струмінь, знизившись до рівня отвору стакану, знайдемо

спочатку час  $\tau$  такого зниження. Точка перетину знаходиться на висоті  $H \approx h \approx y_0 \approx 5h$  над поверхнею, а висота стакану  $h$ . Отже  $4h \approx v_{y,\tau} \approx \frac{g\tau^2}{2}$  або

$$g\tau^2 \approx \sqrt{2gh}\tau \approx 8h \approx 0.$$

Додатний корінь квадратного рівняння  $\tau \approx \sqrt{\frac{2h}{g}}$ . За цей час в горизонтальному напрямі

струмінь зміститься на  $l \approx v_x \tau \approx \frac{3}{2} \alpha \sqrt{2gh} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 3\alpha h$  і опиниться на відстані  $L \approx x_0 + l \approx 7\alpha h$

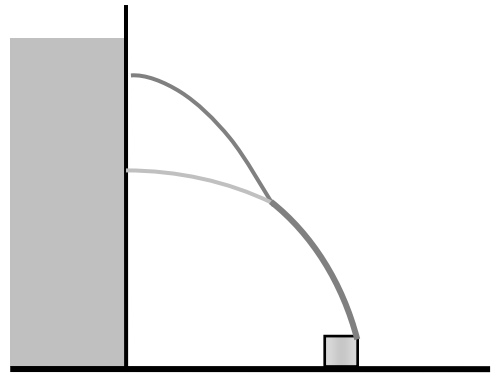
від діжки. Стакан знаходиться від діжки на відстані  $6$  своїх діаметрів  $d$ . Цю ж відстань за умовою задачі спочатку долав у горизонтальному напрямку один перший струмінь. Тобто,

$$6d \approx v_1 t \approx \alpha \sqrt{2gh} \star \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} \approx 6\alpha h.$$

Отже  $d \approx \alpha h$  і тоді  $L \approx 7d$ . Струмінь буде попадати у верхню крайню точку стакану (що може призвести навіть до перевертання останнього). Під час розрахунків ми знехтували опором повітря, впливом сил поверхневого натягу на рух струменя, завдяки яким той власне й утворює одне ціле.

Навіть у цьому випадку завдяки товщині струменя вода буде частково попадати у стакан. Відповідь

на останнє питання в ідеалізованому випадку: струмінь перелітатиме стакан, якщо  $S_1/S_2 \approx 2$ .



**ЗАДАЧА 5 (10 клас).** а) Деякий точковий заряд упродовж тривалого часу утримується на фіксованій відстані від нескінченної незарядженої площини з дуже малою провідністю. Потім заряд швидко віддаляють від площини на відстань удвічі більшу початкової і утримують його в новому положенні. Яка кількість теплоти виділиться після цього у провідній площині, якщо відомо, що під час віддалення точкового заряду було виконано роботу 36 мкДж?

б) Квадратну рамку, в кутах якої розташовані точкові заряди  $-q, q, -q, q$ , спочатку упродовж тривалого часу тримають у фіксованому положенні біля нескінченної незарядженої площини з дуже малою провідністю (мал. 5), а потім швидко повертають на  $90^\circ$  навколо осі, що проходить через центр квадрату перпендикулярно до площини малюнка. Яка кількість теплоти виділиться після цього у провідній площині, якщо відомо, що під час повороту рамки було виконано роботу 36 мкДж?

**РОЗВ'ЯЗАННЯ.** Скористаємося методом електростатичних зображень.

1) Під час переміщення точкового заряду можна вважати заряд-зображення нерухомим. Отже, виконана під час переміщення робота

$$A = k \frac{q^2}{3a} - k \frac{q^2}{2a} + k \frac{q^2}{6a}.$$

(ми збільшили відстань між зарядами від  $2a$  до  $3a$ ). За умовою ця робота  $A = 36$  мкДж.

Застосуємо тепер закон збереження енергії:

$$W_1 = A + W_2 = Q.$$

Початкова енергія кулонівської взаємодії заряду з площиною  $W_1 = \frac{1}{2} * \frac{q^2}{2a}$ , а кінцева енергія  $W_2 = \frac{1}{2} * \frac{q^2}{4a}$ . Ми врахували, що енергія взаємодії реального заряду з його зображенням удвічі менша, ніж енергія взаємодії двох відповідних реальних зарядів (досить згадати, що реальне електричне поле існує тільки у півпросторі).

Таким чином,  $Q = W_1 = W_2 = A = k \frac{q^2}{24a} = \frac{1}{4} A = 9$  мкДж.

2) У цьому випадку легко помітити, що енергія кулонівської взаємодії не змінюється (можна вважати, що просто змінилися на протилежні знаки всіх зарядів). Отже, згідно з законом збереження енергії  $Q = A = 36$  мкДж.

# 11-й клас

2. (X – XI кл.) В горизонтально расположенном сосуде под поршнем находится 1 моль двухатомного идеального газа (рис.1). Атмосферное давление  $p_A$ , первоначально газ занимал половину объема сосуда, его температура была равной 300К. На рис.2 представлена зависимость температуры газа от времени после включения нагревателя мощностью 10 Вт (участок 1-2 линейный). Найти уравнения газовых процессов на участках 1-2 и 2-3-4.

Как меняется теплоемкость газа при увеличении его объема? Сосуд теплоизолирован,, теплоемкость поршня и стенок сосуда значительно превышает теплоемкость газа.

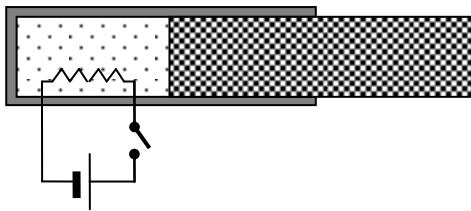


Рис.1

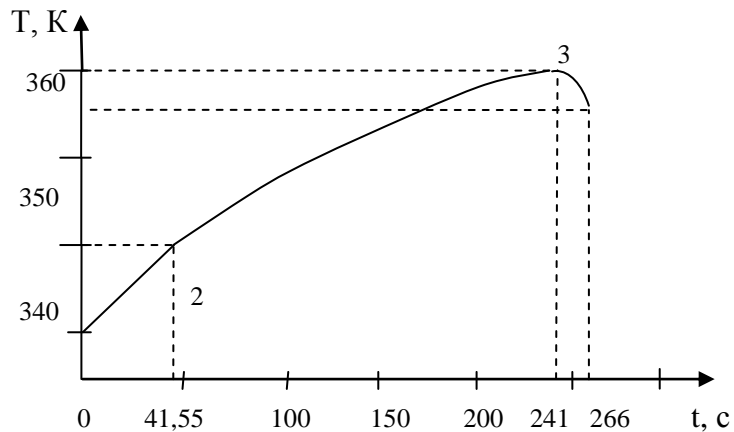
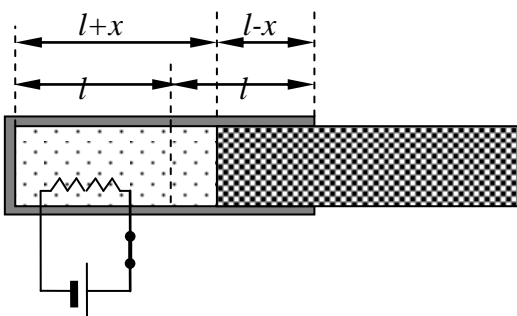


Рис.2

## РЕШЕНИЕ



На участке 1-2 за время  $t_1 = 41,55$ с температура газа линейно возрастает от  $T_0 = 300$  К до  $T_1 = 320$  К. Поэтому теплоемкость

$$C_{12} = \frac{Nt_1}{T - T_0} = \frac{10 \cdot 41,55}{20} = \frac{5}{2}R.$$

Т.к. газ двухатомный, то  $C_{12} = C_V$ , т.е. в течение времени  $t_1$  после включения нагревателя поршень удерживается силой трения о стенки сосуда и остается неподвижным, объем газа равен  $V_0$ . При достижении температуры  $T_1$  давление газа в сосуде увеличивается до значения

$$p_1 = \frac{F}{S} + p_A, \tag{1}$$

где  $F$  – сила трения покоя,  $S$  – площадь сечения поршня, и поршень начинает перемещаться. При этом объем и давление газа изменяются по закону (см.рис.):

$$V(x) = V_0 + xS = V_0 \left(1 + \frac{x}{l}\right), \quad p(x) = p_A + \frac{F(l-x)}{S} = p_1 - \frac{F}{S} \frac{x}{l}, \quad (2)$$

Исключая из этих уравнений величину  $\frac{x}{l}$ , получаем линейную зависимость давления от температуры

$$p = p_1 + \frac{F}{S} \frac{F}{S} \frac{V}{V_0} = (2p_1 - p_A) - (p_1 - p_A) \frac{V}{V_0} \quad (3)$$

Уравнение (3) представляет собой уравнение процесса 2-3-4, в котором остается неизвестным давление  $p_1$ . Для его нахождения воспользуемся уравнением Менделеева-Клапейрона, в котором на участке 2-3-4 температура является квадратичной функцией  $x$ :

$$RT(x) = V_0 \left(1 + \frac{x}{l}\right) \left(p_1 - \frac{F}{S} \frac{x}{l}\right). \quad (4)$$

Температура газа достигает максимального значения  $T_m = 360$  К при  $\frac{x_m}{l}$ , которое может быть определено как вершина параболы или из условия экстремума функции  $T(x)$ :

$$\frac{x_m}{l} = \frac{1}{2} \frac{p_A}{F/S} = \frac{p_A}{2(p_1 - p_A)}. \quad (5)$$

Подставляя (5) в (4) с учетом того, что  $p_1 V_0 = RT_1$ , получаем квадратное уравнение относительно величины  $\frac{p_A}{p_1}$

$$4 \frac{T_m}{T_1} = 1 - \frac{p_A}{p_1} + \frac{p_A^2}{p_1^2}.$$

Подставляя числовые значения  $T_1$ ,  $T_m$  и решая это уравнение, получаем  $p_1 = 2p_A$ . Тогда уравнение процесса 2-3-4 приобретает вид:

$$p = p_A \left(3 - \frac{V}{V_0}\right) \quad \text{или} \quad \frac{V}{V_0} = 3 - \frac{p}{p_A}. \quad (6)$$

Начальный объем при необходимости можно определить из уравнения состояния газа в точке 1, учитывая, что  $p_0 = p_1 \frac{T_0}{T_1} = \frac{15}{8} p_A$ .

Уравнение процесса 2-3-4 (6) может быть также представлено в виде

$$\frac{V(3 - V/V_0)}{T} = const.$$

Для определения зависимости теплоемкости газа от объема на участке 2-3-4 воспользуемся первым началом термодинамики для идеального двухатомного газа в дифференциальной форме (теплотой, отдаваемой газу за счет трения поршня о стенки сосуда, можно пренебречь)



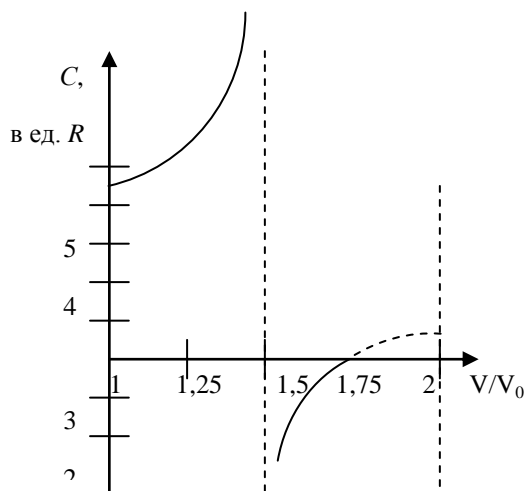
$$\delta Q \approx \frac{5}{2} R dT - p dV.$$

Отсюда теплоемкость газа  $C \approx \frac{5}{2} R - p \frac{dV}{dT}$ . Из уравнения состояния

$$p_A V \left(3 - \frac{V}{V_0}\right) \approx RT$$

Получаем  $\frac{dV}{dT} \approx \frac{R}{(3 - 2V/V_0)p_A}$ . Т.к.  $p \approx p_A(3 - V/V_0)$ , то

$$C \approx \frac{5}{2} R - \frac{3 - V/V_0}{3 - 2V/V_0} R.$$



На графике схематически представлена зависимость  $C$  от  $V/V_0$ . Непосредственным расчетом можно убедиться в том, что при  $V/V_0 > 1,75$  теплоемкость становится положительной, т.е. процесс с линейной зависимостью давления от объема, сопровождающийся понижением температуры, становится возможным лишь при отводе теплоты. Если теплота не отводится, то при  $V/V_0 \geq 1,75$  поршень практически мгновенно выталкивается из сосуда с газом.

4. Контур, состоящий из последовательно соединенных катушки индуктивностью  $L$  и конденсатора емкостью  $C$ , подключают к источнику с ЭДС  $E$ . Когда напряжение на конденсаторе достигает максимального значения, полярность источника меняется на противоположную. Каким будет максимальное напряжение на конденсаторе после  $n$  таких переключений? Каким будет максимальное напряжение на конденсаторе при учете потерь в контуре? Сопротивление потерь  $r$  считать много меньшим характеристического сопротивления  $\rho \approx \sqrt{\frac{L}{C}}$ . Через какое число переключений будет достигнута максимальная амплитуда напряжения на конденсаторе?

### РЕШЕНИЕ

Для направления обхода контура, изображенного на рис.1, справедливы следующие уравнения и соотношения:

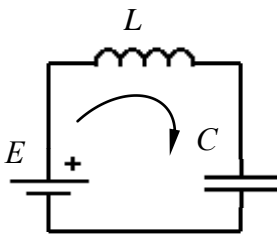


Рис.1

$$\frac{q}{C} + L \frac{di}{dt} = E$$

или  $q'' + \omega^2 q = \frac{E}{L}$ , где  $\omega^2 = \frac{1}{LC}$  и  $i = \frac{dq}{dt}$ .

Если ввести новую переменную  $(q - EC)$ , то уравнение колебаний принимает вид

$$(q - EC)'' + \omega^2 (q - EC) = 0, \quad (1)$$

а его решение  $q = A \cos \omega t + EC$ .

Амплитуда  $A$  и начальная фаза  $\varphi$  определяются из начальных условий  $q(0) = 0$  и  $i(0) = 0$ .

Тогда  $q(t) = EC(\cos \omega t - 1)$  и  $i(t) = \omega EC \sin \omega t$ . (2)

Напряжение и заряд на конденсаторе будут максимальными через полпериода. При этом

$$q_{\max} = -2EC. \quad (3)$$

**Первое переключение.** Для контура, изображенного на рис.2, начальные условия следующие:

$q(0) = |q_{\max}|$ ,  $i(0) = 0$ . Для выбранного направления обхода применение второго правила Кирхгофа дает

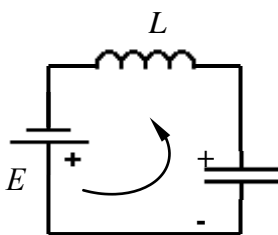


Рис.2

$$\frac{q}{C} - L \frac{di}{dt} = E \quad \text{и} \quad i = \frac{dq}{dt}, \quad (4)$$

а уравнение колебаний приводится к виду:

$$(q - EC)'' + \omega^2 (q - EC) = 0. \quad (5)$$

Тогда  $q = A \cos(\omega t + \varphi) - EC$ .

С учетом новых начальных условий получаем  $A = 3EC$  и, таким образом, после первого переключения

$$q_1(t) = EC(3 \cos \omega t - 1) \quad \text{и} \quad i_1(t) = 3\omega EC \sin \omega t, \quad (6)$$

а максимальное напряжение на конденсаторе

$$U_{1\max} \approx 4E.$$

Очевидно, что при последующих переключениях колебания описываются уравнениям (5),

а начальные условия определяются модулями максимальных значений заряда на конденсаторе и нулевым током. Обобщая результаты (6) на  $n$  переключений, получаем

$$q_n(t) \approx EC(2n+1)\cos\omega t, \quad i_n(t) \approx \omega EC(2n+1)\sin\omega t \quad (7)$$

Напряжение на конденсаторе

$$U_{n\max} \approx 2(n+1)E, \quad i_{n\max} \approx (2n+1)\omega EC.$$

На рис 3 представлены зависимости напряжения на конденсаторе и тока в контуре от времени при изменениях полярности источника каждые полпериода в отсутствие потерь.

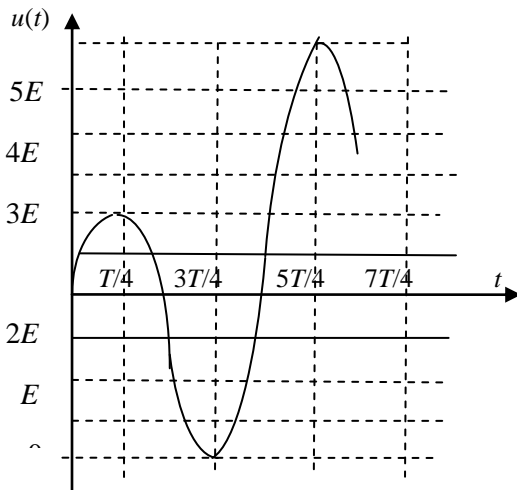


Рис.3

**Рассмотрим контур с потерями.** Т.к.

$r \ll \rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$ , то изменением амплитуды тока и напряжения за полпериода, а также дополнительным фазовым сдвигом между током и напряжением можно пренебречь и пользоваться уже полученными результатами. Амплитуда напряжения на конденсаторе и тока в контуре будет оставаться неизменной по достижении такого значения, при котором энергия, подводимая за полпериода от источника, будет равна энергии теряемой за это же время.

Пусть энергетический баланс в контуре установился через  $n$  переключений. Рассчитаем энергию  $W$ , получаемую контуром от источника за полпериода:

$$W = \int_0^{T/2} E i_n(t) dt = E^2 C \omega (2n+1) \int_0^{T/2} \sin\omega t dt = 2E^2 C (2n+1) \quad (8)$$

Энергия, теряемая за это же время

$$W_r = \int_0^{T/2} i_n^2(t) r dt = \omega^2 E^2 C^2 r (2n+1)^2 \int_0^{T/2} \sin^2\omega t dt = \frac{\pi}{2} \frac{r}{\sqrt{L/C}} E^2 C (2n+1)^2 \quad (9)$$

Приравняв выражения (8) и (9), получаем  $2n+1 = \frac{4\sqrt{L/C}}{\pi r}$ . Т.к.  $\sqrt{\frac{L}{C}} \gg r$ , то  $n \gg 1$  и

$$n \approx \frac{2\sqrt{L/C}}{\pi r}.$$

Тогда с использованием (7) получаем

$$u(t) \approx E \frac{4\sqrt{L/C}}{\pi r} \cos\omega t \quad \text{и} \quad i(t) = \frac{4}{\pi} \omega C E \frac{\sqrt{L/C}}{r} \sin\omega t \approx \frac{E}{r} \sin\omega t.$$

Если потери в контуре обусловлены внутренним сопротивлением источника тока, то полученный результат очевиден – сила тока в контуре не может превышать силу тока короткого замыкания.

# 11 клас

## Задача 3

### Розв'язок

- 1) Запишемо вирази для довжини шляху  $L^\pm$  в лабораторній (нерухомій) системі відліку (знак «+» відповідає хвилі, напрямок руху якої співпадає з напрямком обертання, знак «-» - хвилі, що розповсюджується в протилежному напрямку) :

$L^\pm \approx 2\pi R \mp R\Omega t^\pm$ , де  $R$  – радіус кільця,  $\Omega$  – кутова швидкість обертання,  $t^\pm$  - час, який витрачають хвилі на обхід кільця. Якщо  $V_\phi$  – швидкість хвилі відносно нерухомого кільця, то відносно рухомого кільця будемо мати в лабораторній системі відліку згідно релятивістському закону додавання швидкостей

$$V_\phi \approx \frac{V_\phi \mp R\Omega}{1 \mp \frac{V_\phi R\Omega}{c^2}}, \text{ де } c - \text{швидкість світла.}$$

Тоді часи  $t^+$  і  $t^-$  визначаються, як відношення  $\frac{L^+}{V_\phi^+}$  і  $\frac{L^-}{V_\phi^-}$  відповідно:

$$t^\pm \approx \frac{L^\pm}{V_\phi^\pm} \approx \frac{2\pi R(1 \mp \frac{V_\phi R\Omega}{c^2})}{V_\phi(1 \mp \frac{R^2\Omega^2}{c^2})}, \text{ звідки знаходимо шукану різницю розповсюдження}$$

зустрічних хвиль

$$\Delta t \approx t^+ - t^- \approx \frac{4\pi R^2\Omega}{c^2(1 \mp \frac{R^2\Omega^2}{c^2})}.$$

- 2), 3) зі знайденого виразу слідує, що різниця не залежить від швидкості розповсюдження хвилі, а отже не залежить від того, чи заповнений оптичним середовищем інтерферометр чи ні і не залежить від природи хвиль, які генеруються джерелом.

- 4) для обчислення різниці фаз зустрічних хвиль на виході кільця, зручно перейти в систему відліку  $k'$ , яка супроводжує обертання кільцевого інтерферометра, в силу того, що інтерференційна картина, фіксується приймачем, який є нерухомим відносно системи, що обертається. Згідно перетворенням Лоренца різниця часів розповсюдження зустрічних хвиль в системі відліку  $k'$  є

$$\Delta t' \approx \sqrt{1 \mp \frac{R^2\Omega^2}{c^2}} \approx \frac{4\pi R^2\Omega}{c^2 \sqrt{1 \mp \frac{R^2\Omega^2}{c^2}}}, \text{ а різниця фаз зустрічних хвиль на виході з}$$

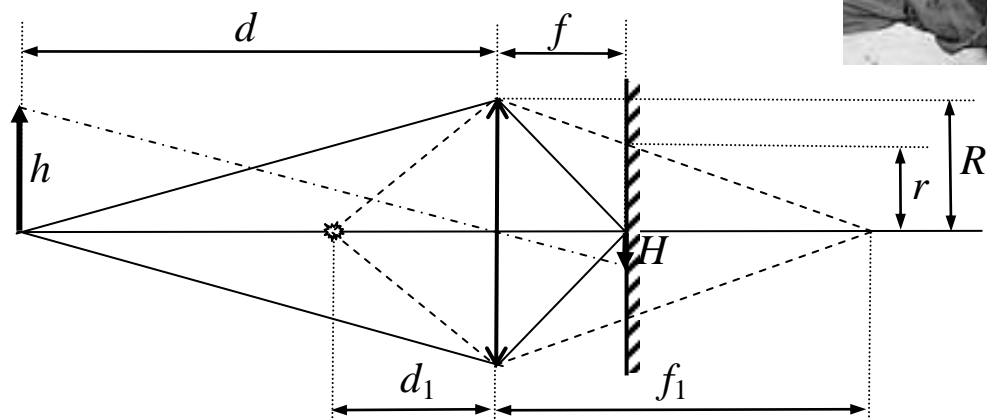
$$\text{кільця } \Delta \varphi \approx \omega \Delta t' \approx \frac{4S\Omega\omega}{c^2 \sqrt{1 \mp \frac{R^2\Omega^2}{c^2}}} \text{ (} S \text{ – площа кільця).}$$

## **Коментар**

*Запропонована задача описує так званий ефект Саньяка:*

*Ефект Ж.Саньяка (1913) поряд з експериментом Майкельсона-Морлі є одним з основоположних дослідів спеціальної теорії відносності. Дослід Саньяка довів принципову можливість експериментального визначення кутової швидкості обертання системи спостерігачем, розташованим всередині системи, тобто можливість визначення неінерційного руху системи для спостерігача, який є нерухомим відносно цієї системи.*

**Кулі з острова Пасхи. Розв'язок.** Фотоапарат фокусує чітке зображення людини на матриці або фотоплівці. При цьому предмети, які знаходяться ближче або далі не будуть чіткими. Зображення маленьких краплинок перед об'єктивом буде утворюватись далеко позаду матриці, на якій потік світла від краплинки залишає блідну прозору пляму радіусом  $r$  (див. Рис.).



Запишемо систему рівнянь.

$$\begin{aligned} \frac{1}{f} &= \frac{1}{d} + \frac{1}{f}, \\ \frac{1}{f} &= \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1}, \\ \frac{R}{f_1} &= \frac{r}{f}, \\ \frac{h}{H} &= \frac{d}{f}. \end{aligned}$$

Розміри, які ми міряємо на фотографії ( $H'$  і  $r'$ ) не співпадають з розмірами на матриці ( $H$  і  $r$ ), але  $H' = H/r$ . З урахуванням останнього рівняння з системи знаходимо  $d_1 = \frac{d}{1 + \frac{h r}{H R}}$ . Висота кадру відповідає висоті  $h \approx 1$  м. Для першої краплинки

$r = H/6$ , для другої  $r = 9/80$ . Отже  $d_1 \approx 17$  см,  $d_2 \approx 24,5$  см. Аналогічні результати для відстані від краплинки до площини лінзи об'єктиву отримуємо, якщо краплинка знаходиться не на головній оптичній осі. Для не дуже великих кутів це є досить точною оцінкою відстаней, які треба знайти.

Зауважимо, що розв'язок задачі відповідає випадку повністю відкритої діафрагми, на що вказує зйомка у печері за наявності у людини ліхтаря. Також можна було б розглянути випадок, коли краплинка ближче до об'єктиву ніж його фокусна відстань. Особливості цього розв'язку більшою мірою пов'язані з конструктивними особливостями фотоапарату (розмірами матриці, тощо...). Нарешті ідея, що концентричні кола, а з ними і сама природа кругів пов'язані з дифракційними явищами на отворі об'єктиву, не витримує оціночних розрахунків.

Середня яскравість  $E_1$  кола на фотографії пропорційна відношенню світлової енергії  $W_1$  до площі кола  $\pi r^2$ , на яку вона падає. Енергія  $W_1$  пропорційна до добутку енергії  $W_0$ , яку віддзеркалює пилінка, і тілесного куту, який спирається на площу об'єктива  $\pi \frac{R^2}{d_1^2}$ . Енергія  $W_0$  пропорційна до добутку енергії  $W$ , яка випромінюється, і тілесного куту, який спирається на площу пилінки

○  $\propto \frac{S}{d_1^2}$ . Отже,  $E_1 \propto \frac{WR^2S}{d_1^4 r_1^2}$  - величина обернено пропорційна четвертій степені відстані.

Аналогічний вигляд має співвідношення для другої пилінки. Якщо  $E_1 \propto E_2$ , маємо  $d_1^2 r_1 \propto d_2^2 r_2$ . З урахуванням попередніх рівнянь знаходимо:

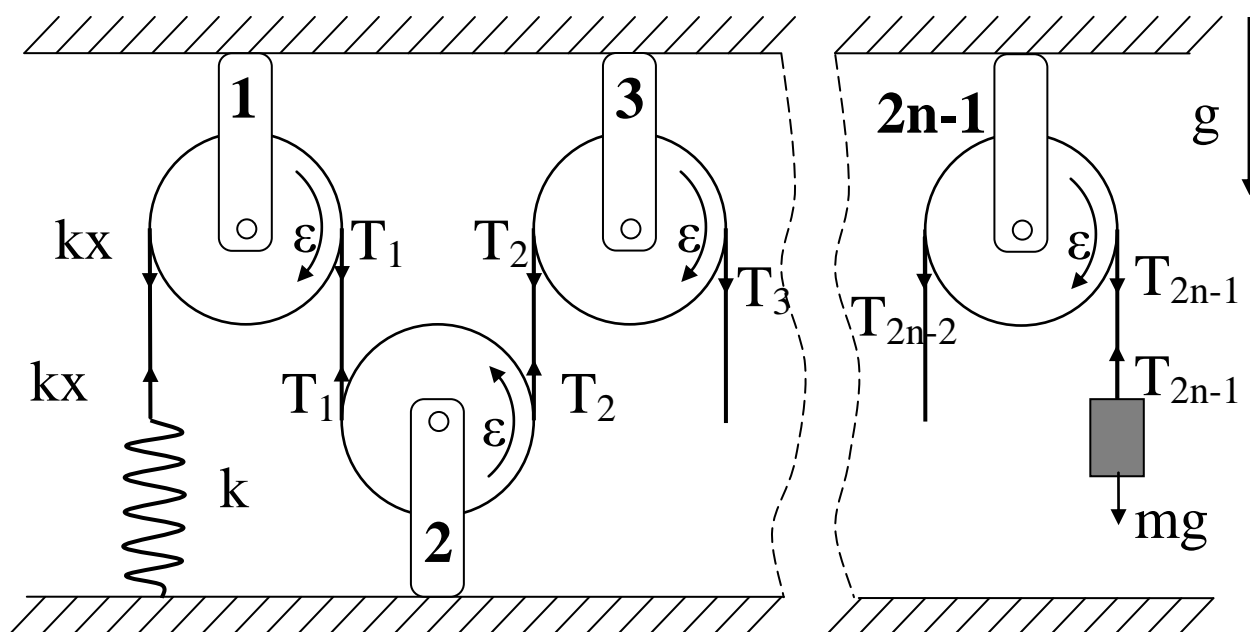
$$d_1 \approx d_2 \approx d, \quad d_1 \propto \frac{d}{1 \pm \sqrt{r_1/r_2}}, \quad d_2 \propto \frac{d}{1 \pm \sqrt{r_2/r_1}}, \quad R \propto \frac{h}{H} \sqrt{r_1 r_2}.$$

**11 клас**  
**Розв'язки**

4) Дано систему блоків (рис.1). Через блоки перекинута тонка невагома нерозтяжна нитка. Всі  $2n-1$  ( $n$  – натуральне число) однорідних блоків мають однакову масу  $M$  і радіус  $r$ . Блоки можуть обертатися навколо своєї вісі без тертя. Нитка не ковзає по блоках. Коефіцієнт пружності пружини  $k$ . Визначити період малих вертикальних коливань тягарця маси  $m$  після виведення його з положення рівноваги.

**Розв'язок**

На малюнку показано введені позначення, сили, що діють у системі та прискорення які набудуть блоки при обертанні в одному з напрямів. Внаслідок кінематичної в'язі всі кутові прискорення блоків однакові, а прискорення тіла  $m$  пов'язане з кутовим прискоренням блоків співвідношенням:  $a = \varepsilon \cdot r$ .



Запишемо рівняння руху блоків:

$$1\text{-й блок: } J \cdot \varepsilon = (T_1 - kx) \cdot r;$$

$$2\text{-й блок: } J \cdot \varepsilon = (T_2 - T_1) \cdot r;$$

$$3\text{-й блок: } J \cdot \varepsilon = (T_3 - T_2) \cdot r;$$

.....

$$2n-2\text{-й блок: } J \cdot \varepsilon = (T_{2n-2} - T_{2n-3}) \cdot r;$$

$$2n-1\text{-й блок: } J \cdot \varepsilon = (T_{2n-1} - T_{2n-2}) \cdot r,$$

де  $J = \frac{1}{2} M \cdot r^2$  момент інерції блока, як однорідного циліндру.

Додавши праві та ліві частини виписані виписаних рівнянь, маємо:

$$(2n-1) \cdot J \cdot \varepsilon = (T_{2n-1} - kx) \cdot r \tag{1}$$

Рівняння руху тягарця:



$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{g} - T_{2n-1} \quad (2)$$

З рівнянь 1 та 2 з урахуванням зв'язку  $\mathbf{a} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{r}$  маємо:

$$\left(\frac{1}{2} \cdot (2n-1) \cdot M + m\right) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{g} - k \cdot \mathbf{x} \quad (3)$$

Нехай  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}$ , де  $\mathbf{x}_0$  – значення  $x$  в стані рівноваги:

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{g} - k \cdot \mathbf{x}_0 = 0$$

Тоді рівняння (3) можна записати так:

$$\left(\frac{1}{2} \cdot (2n-1) \cdot M + m\right) \cdot \mathbf{a} = -k \cdot \Delta \mathbf{x}$$

Це рівняння гармонічних коливань з циклічною частотою  $\omega$ :

$$\omega^2 = \frac{k}{\frac{1}{2} \cdot (2n-1) \cdot M + m}$$

Звідки період коливань:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{2} \cdot (2n-1) \cdot M + m}{k}}$$